Knobelaufgaben

1) m und $n \in \mathbb{N}$ ungerade $\Rightarrow 8 / n^2 - m^2$ und $16 / n^4 - m^4$

allgemein $\boxed{2^{r+2} / n^{2^r} - m^{2^r} \text{ für } r \geq 1 \text{ aus } \mathbb{N}}$

Sei $m = 2a+1$ und $n = 2b+1$ mit $a, b \in \mathbb{N}_0$

dann gilt:

$$n^2 - m^2 = (n+m)(n-m) = (2a+2b+2)(2b-2a)$$
$$= 4(a+b+1)(b-a)$$

1. Fall (a und b gerade) oder (a und b ungerade)

$\Rightarrow b-a$ gerade, d.h. $2 / b-a$

d.h. $n^2 - m^2 = 4(a+b+1)2 \cdot t = 8(a+b+1) \cdot t$

$\Rightarrow 8 / n^2 - m^2$

2. Fall (a ungerade und b gerade) oder umgekehrt

$\Rightarrow a+b+1$ gerade, d.h. $2 / a+b+1$

$\Rightarrow 8 / n^2 - m^2$

$$n^4 - m^4 = (n^2+m^2)(n^2-m^2)$$

da n und m ungerade $\Rightarrow n^2$ und m^2 ungerade

$\Rightarrow n^2 + m^2$ gerade d.h. $2 / n^2 + m^2$

ferner $8 / n^2 - m^2 \Rightarrow 16 / n^4 - m^4$

Teil des Allgemeinen: Ind. Anfang $r = 1$: $2^{1+2} / n^2 - m^2$ ✓

Ind. schritt $r \longmapsto r+1$ (Aussage richtig für r)

$$n^{2^{r+1}} - m^{2^{r+1}} = (n^{2^r} + m^{2^r})(n^{2^r} - m^{2^r})$$

nach Ind.Vor. gilt $2^{r+2} / n^{2^r} - m^{2^r}$, aber auch $2 / n^{2^r} + m^{2^r}$

$\Rightarrow 2^{(r+1)+2} = 2 \cdot 2^{r+2} / n^{2^{r+1}} - m^{2^{r+1}}$

2) $p \geq 5$ Primzahl $\Rightarrow 3 \mid p^2 + 2$

Wegen $p^2+2 = (p^2-1)+3$ genügt es $3 \mid p^2-1$ zu zeigen:

Division durch 3 mit Rest ergibt

$$\begin{cases} p = 3m + r \\ 2p = 3n + s \end{cases} ; \quad m, n \in \mathbb{N} ; \quad r, s \in \{1;2\}$$

Es muss $r \neq s$ gelten, denn andernfalls wäre

$$p = 2p - p = 3(n-m) \Rightarrow 3 \mid p \text{ ↯}$$

Nun folgt

$$2p^2 = (3m+r)(3n+s) = 9mn + 3ms + 3nr + \underbrace{rs}_{=2}$$

$$\Rightarrow 2(p^2-1) = 2p^2 - 2 = 3(3mn + ms + nr)$$

$$\Rightarrow 3 \mid p^2 - 1, \text{ da } 3 \text{ prim und } 3 \nmid 2$$

3) Beh.: $31^{11} < 17^{14}$

Beweis: zunächst ist $2^{11} < 17^3$ zu zeigen:

$$2^{11} = 2^8 \cdot 2^3 = (2^4)^2 \cdot 2^3 = 16^2 \cdot 8 < 17^2 \cdot 17 = 17^3$$

Jetzt folgt:

$$31^{11} < 34^{11} = (17 \cdot 2)^{11} = 17^{11} \cdot 2^{11} < 17^{11} \cdot 17^3 = 17^{14} \quad . —$$

---

4) $N_1 = a\sqrt{a} + \sqrt{ab}$; $N_2 = b\sqrt{b} + \sqrt{ab}$

wobei $\sqrt{ab} = 1$ und $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3$.

Setze $x := \sqrt{a}$ und $y = \sqrt{b}$

$\Rightarrow$ $xy = 1$ und $x + y = 3$; $N_1 = x^3 + 1$; $N_2 = y^3 + 1$

Es gilt $N_1 \cdot N_2 = (x^3+1)(y^3+1) = x^3y^3 + x^3 + y^3 + 1$

$$= \underbrace{(xy)^3}_{=1} + x^3 + y^3 + 1 = x^3 + y^3 + 2$$

$$= N_1 + N_2$$

Es ist $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + 3x + 3y + y^3$

$$= x^3 + y^3 + 3(x+y)$$

$$= x^3 + y^3 + 9$$

daher: $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 9 = 3^3 - 9 = 18$

$\Rightarrow$ $N_1 \cdot N_2 = N_1 + N_2 = x^3 + y^3 + 2 = 18 + 2 = 20$. —

5) Setze $x := \sqrt{2} + 1$; $y = \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow xy = 1$

Für $m \in \mathbb{N}$ definiere $A_m = x^m + y^m$

Dann gilt für $m > n$ aus $\mathbb{N}$: $A_{m+n} = A_m \cdot A_n - A_{m-n}$

Bew:

$$A_m \cdot A_n = (x^m + y^m)(x^n + y^n) = x^{m+n} + x^m y^n + y^m x^n + y^{m+n}$$

$$A_{m-n} = x^{m-n} + y^{m-n} = x^m x^{-n} + y^m y^{-n} \quad | \cdot \overbrace{x^n \cdot y^n}^{=1}$$

$$\Rightarrow A_{m-n} = x^m y^n + y^m x^n$$

Somit

$$A_m \cdot A_n - A_{m-n} = x^{m+n} + x^m y^n + y^m x^n + y^{m+n} - x^m y^n - y^m x^n$$

$$= x^{m+n} + y^{m+n} = A_{m+n} .$$

---

6) Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

m ungerade $\Longleftrightarrow 3 / 2^m - 2$

Zunächst wird gezeigt: $3 / 4^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Bew durch Induktion nach n:

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist dies richtig. Sei $n \geq 1$ und die Aussage richtig für n:

$$4^{n+1} - 1 = 4 \cdot 4^n - 1 = (3 \cdot 4^n) + (4^n - 1)$$

$$\Rightarrow 3 / 4^{n+1} \quad =: \text{Beh} .$$

$\longrightarrow$

Zu 6) '$\Longrightarrow$' Sei $m = 2n+1$ ungerade

$$2^m - 2 = 2^{2n+1} - 2 = 2 \cdot 2^{2n} - 2 = 2 \cdot 4^n - 2$$
$$= 2(4^n - 1)$$

Wegen $3 \mid 4^n - 1 \Longrightarrow 3 \mid 2^m - 2$

'$\Longleftarrow$' Sei $m = 2n$ gerade

$$2^m - 2 = 2^{2n} - 2 = 4^n - 2 = (4^n - 1) - 1$$

$\Longrightarrow 3 \nmid 2^m - 2$, dies folgt also so:

Ist $r \in \mathbb{N}$ mit $3 \mid r \Longrightarrow 3 \nmid r - 1$

denn ang. $3 \mid r - 1 \Longrightarrow r - 1 = 3s \Longrightarrow 1 = r - 3s$

wegen $3 \mid r$ wäre $3 \mid 1$ ↯.