Einführende Übungsstunde:

1. Aussagen und Beweise:

Def. aus der Logik

Unter einer Aussage versteht man ein schriftsprachliches Gebilde, das inhaltlich entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele für Aussagen sind

" 5 ist eine Primzahl " (w)

" 7 ist kleiner als 3 " (f)

" München ist eine Stadt " (w) usw.

a) Man hat folgende wichtige Aussagen in der Mathematik:

i) Existenzaussagen

Sie hat immer folgende Gestalt

"Es gibt ein Objekt x mit der Eigenschaft E",

bzw. " Es existiert ..... ".

Man hat noch weitere Formulierungen für Existenzaussagen, wie z.B.

1) Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft E, so gilt "$f(x) = 0$ für ein $x \in \mathbb{R}$" bedeutet "es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$".

2) "$x^2 = 5$ für ein $x \in \mathbb{R}$" heißt "es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 5$" oder " für ein (geeignetes) $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 = 5$" oder "es gibt (mindestens) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 5$".

Durch eine Existenzaussage wird behauptet, daß es mindestens ein Objekt mit den geforderten Eigenschaften gibt.

Formal schreibt man auch: " $\exists$ Objekt x : x hat Eigenschaft E "

3) "(Im allgemeinen) gilt nicht, daß $x^2 + x + 3$ eine Primzahl ist" bedeutet:

"es gibt ein x, so daß $x^2 + x + 3$ ~~kein~~ keine Primzahl ist"

(z.B. $x = 2$)

oder falls jedem Objekt x eine Aussage $A(x)$ zugeordnet ist, so bedeutet:

"(Im allgemeinen) gilt $A(x)$ nicht" einfach

" $\exists$ Objekt x, so daß $A(x)$ falsch ist ".

ii) Allaussagen

Mit einer Allaussage wird behauptet, daß alle Objekte eines bestimmten Bereiches / einer bestimmten Menge eine geforderte Eigenschaft besitzen.

Man hat folgende Allaussagen:

1) Für jedes $x \in M$ gilt ...

2) Sei $x \in M$ beliebig. Dann gilt ...

3) Die Elemente von M erfüllen ...

Notation: "$\forall x \in M$ gilt ..."

iii) Gemischte Aussagen (Existenz- und Allaussagen)

In einem Satz können Existenz- und Allaussagen vorkommen, wie z.B.

"Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \varepsilon$"

Anders geschrieben:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : |x_n| < \varepsilon \,.$$ (beachte: n hängt von ε ab!)

Man darf $\forall$ und $\exists$ nicht vertauschen, sonst führt dies zu Mißverständnissen, wie z.B.

$\exists x \; \forall z : E(x,z)$ bedeutet: "Es gibt ein x, so daß $E(x,z)$ für alle z zutrifft"

f stehe für Frauen, m für Männer und $h(m,f)$ für "m hat was mit f":

$$\forall m \; \exists f : h(m,f) \quad \text{oder} \quad \exists f \; \forall m : h(m,f) \,.$$

b) Man kann Aussagen verknüpfen, um neue Aussagen zu erzeugen:

i) Negation:

"Negation einer Aussage" bedeutet "eine Aussage verneinen", "das Gegenteil einer Aussage behaupten."

Dies geschieht formal häufig dadurch, daß man einer zu verneinenden Aussage das Wort "nicht" bzw. "Es gilt nicht" voranstellt, wie z.B.

Sei $A :=$ "Hans ist dick"

nicht A = "Hans ist nicht dick"

oder $B :=$ "5 ist eine Primzahl"

nicht B = "5 ist keine Primzahl"

Das Verneinen von Aussagen bereitet gelegentlich Probleme:

Die Verneinung der Aussage "Es ist nicht alles Gold, was glänzt"

ist "Alles, was glänzt, ist Gold".

Die Verneinung von " $\exists\, x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 4$ " ist

$$" x^2 \neq 4 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} ".$$

Die Verneinung von " $|x_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ " ist

$$" \exists\, n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq \varepsilon ".$$

Negation von " $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n \in \mathbb{N} : |x_n| < \varepsilon$ " ist

$$" \exists\, \varepsilon > 0 : |x_n| \geq \varepsilon \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} ",$$

kann man auch so schreiben

$$" \exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq \varepsilon ".$$

(ii) Implikation

Sind A und B Aussagen, so nennt man die neue Aussage "Aus A folgt B" einen Schluss oder Implikation und man schreibt dafür " $A \Rightarrow B$ ".

auch Beispiel
$1 = -1 \Rightarrow 1 = 1$
$2 = 3 \Rightarrow 4 = 9$
$2 = -2 \Rightarrow 4 = 4$

Solche Implikationen sind z.B.

1) Ist $p \geq 3$ eine Primzahl $\Rightarrow$ p ist ungerade
2) Ist f diffbare Funktion $\Rightarrow$ f stetige Funktion
3) Ist x ein Pferd $\Rightarrow$ x ist ein Säugetier

Implikation ist eine Allaussage, z.B.:
$x \in M \Rightarrow x$ hat E
kann so formuliert werden
$\forall x \in M : x$ hat E

Sind A und B Aussagen, für die " $A \Rightarrow B$ " zutrifft, so heißt A hinreichend für B, und B notwendig für A.

Sei z.B. $A :=$ "Leben", $B :=$ "Sauerstoff atmen"

Dann gilt $A \Rightarrow B$, d.h. B notwendig für A.

oder $A :=$ "volle Punktzahl", $B :=$ "Prüfung bestehen",

dann gilt $A \Rightarrow B$ und A ist hinreichend für B.

Sind A und B Aussagen und gilt:

$$" A \Rightarrow B " \text{ und } " B \Rightarrow A ",$$

So sagt man
"A ist äquivalent zu B" oder
"A ist gleichbedeutend mit B" oder
"A gilt genau dann, wenn B gilt"
"A gilt dann und nur dann, wenn B gilt"
"A ist notwendig und hinreichend für B"
und man schreibt für diesen Sachverhalt "$A \Leftrightarrow B$".

Bei der Negation von Implikationen muß man vorsichtig sein, dazu ein Beispiel:
Die Negation der Aussage
"Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta \Rightarrow |x-5| < \varepsilon$"
ist
"$\exists\, x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$ und $|x-5| \geq \varepsilon$"
und nicht etwa
"$x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \Rightarrow |x-5| \geq \varepsilon$".

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion und $a \in \mathbb{R}$, dann hat die Aussage
"$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (\text{Ist } x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$"
die Negation
"$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$".

iii) "und", "oder"

Aussagen kann man bekanntlich durch "und" verknüpfen, wie z.B.
"5 ist eine Primzahl und 5 ist größer 0."

Die Verknüpfung "oder" ist nicht ausschließend gemeint, d.h. sind A und B Aussagen und gilt "A oder B", so muß wenigstens eine der Aussagen A, B zutreffen, es dürfen aber auch beide zutreffen. Folgende "oder"-Beispiele:

1) "$x > 5$ oder $x < 1$" (ausschließend) ("entweder ... oder ...")
2) "x positiv oder x gerade" (einschließend)

Negation von 1): "$x \leq 5$ und $x \geq 1$" ($\Leftrightarrow$ "$1 \leq x \leq 5$")
Negation von "$x < 7$ und x gerade" ist "$x \geq 7$ oder x ungerade"

Unter einem Beweis versteht man die Ableitung einer Aussage aus anderen Aussagen nach bestimmten logischen Schlußregeln.

Beim Beweisen entsteht eine endliche Folge von Aussagen der Gestalt

$$"A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n"$$

Beweis = Verifikation einer Aussage der Gestalt "$A \Rightarrow B$", unabhängig davon ob die Aussagen A, B wahr oder falsch sind

Will man komplizierte Aussagen auf einfachere (evidente, durchschaubare) Aussagen zurückführen, so stößt man irgendwann auf Sätze, die sich aus keinen früheren Sätzen mehr herleiten lassen.

Solche Sätze nennt man Axiome, das sind also Aussagen, die als wahr postuliert werden.

Im obigen Diagramm ist A_1 ein Axiomensystem.

Beispiel:

A_1 sei das Axiomensystem für die reellen Zahlen.

Daraus wird die Aussage $A_2 := "x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 \; \forall x \in \mathbb{R}"$ bewiesen, wie folgt:

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

Daraus wird die Aussage $A_3 := "x \cdot 0 = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}"$ bewiesen, wie folgt:

Setze $a := x \cdot 0$, dann gilt:

$$a = a + 0 = a + (a + (-a))$$
$$= (a + a) + (-a) \overset{A_2}{=} a + (-a) = 0,$$

man sieht $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3$.

Es gibt verschiedene Formen von Beweisen:

i) Direkter Beweis

Beispiel siehe oben!

ii) Indirekter Beweis

Ist A Voraussetzung und B die Behauptung und will man "$A \Rightarrow B$" beweisen, so kann man auch indirekt vorgehen und "nicht $B \Rightarrow$ nicht A" beweisen, dies nennt man auch einen Widerspruchsbeweis.

Beispiele:

1) Vor: Sei R ein faktorieller Ring

Beh: Ist $R = \mathbb{Z}$, so gibt es unendlich viele Primzahlen in R.

Bew:

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, etwa $p_1, \dots, p_r$, wobei $r \geq 2$.

Setze $n := p_1 \cdots p_r + 1 \notin \{0, 1, -1\}$.

Da R faktoriell, so gibt es ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit p_i / n, d.h.

$$p_1 \cdots p_r + 1 = p_i m \quad \text{mit einem } m \in R,$$

daher $p_i / 1$ ↯. $\Downarrow$ o.E. $i = 1$ (nach Umnummerierung)

$$1 = p_1(m - p_2 \cdots p_r)$$

2) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Bew:

Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, dann gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ mit

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Man kann annehmen, daß a und b teilerfremd sind.

Es folgt $2 = \frac{a^2}{b^2}$, d.h. $2b^2 = a^2$.

- Ist a gerade $\overset{\text{a, b teilerfremd}}{\Longrightarrow}$ b ungerade, also

  $a = 2n$ und $b = 2m + 1$

  $\Rightarrow 4n^2 = a^2 = 2b^2 = 2(2m+1)^2 = 2(4m^2 + 4m + 1)$

  $\Rightarrow 2n^2 = 4m^2 + 4m + 1 \Rightarrow 2 / 1$ ↯.
- Ist a ungerade $\Rightarrow a^2$ ungerade ↯ zu $a^2 = 2b^2$. ⊢

Jetzt noch eine Beweistechnik, nämlich der Beweis durch Induktion:

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ zugeordnet.

Es soll die Richtigkeit der Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ bewiesen werden.

Dazu ist folgendes zu zeigen:

i) $A(n_0)$ ist richtig (Induktionsanfang)

ii) Ist $n \geq n_0$ und $A(n)$ richtig $\Rightarrow$ $A(n+1)$ richtig (Ind. schritt)

Dann ist $A(n)$ richtig für alle $n \geq n_0$.

__Beispiel:__

Bsp: $(xy)^n = x^n y^n$
Ind.anf. $n = 0$ ✓
Ind.schritt $n \to n+1$:
$(xy)^{n+1} = (xy)^n (xy)$
$= x^n y^n xy$
$= x^{n+1} y^{n+1}$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage

$$\text{"} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{"}.$$

i) $A(1)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ richtig.

ii) Sei nun $n \geq 1$ und die Aussage $A(n)$ richtig. Zu zeigen ist, daß die Aussage $A(n+1)$ richtig ist:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = n+1 + \sum_{k=1}^{n} k \overset{IV}{=} n+1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \quad —$$

__Anderes Beispiel:__

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$(x-1) \sum_{i=0}^{n-1} x^i = x^n - 1,$$

denn für $n = 1$ steht beiderseits $x - 1$. Sei nun $n \geq 1$ und die Aussage richtig für n, dann gilt:

$$(x-1) \sum_{i=0}^{n} x^i = (x-1)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i + x^n\right)$$

$$= (x-1) \sum_{i=0}^{n-1} x^i + x^{n+1} - x^n$$

$$\overset{IV}{=} x^n - 1 + x^{n+1} - x^n = x^{n+1} - 1. \quad —$$

2. Mengen und Abbildungen

a) Mengen

Der Mengenbegriff wird hier "naiv" (nicht axiomatisch) eingeführt:

Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Beispiele:

$\{1,2,3,4,5\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$, ...

$\{2,4,6,6\} = \{2,4,6\}$, $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$

Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge von B (bzw. B Obermenge von A) falls gilt:

$$\text{Ist } x \in A \Longrightarrow x \in B,$$

und man schreibt $A \subset B$ ($\Longleftrightarrow: B \supset A$).

Zwei Mengen A und B heißen gleich, falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt. Man schreibt $A = B$.

Beispiele:

1) Sei $A := \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1 \leq 9\}$
$B := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$

Es gilt $A = B$. Dies zeigt man so:

i) Zunächst gilt $A \subset B$, denn:

Sei $x \in A \Rightarrow 2x+1 \leq 9 \Rightarrow 2x \leq 8$
$\Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow x \in B$.

ii) $B \subset A$, denn sei $x \in B \Rightarrow x \leq 4$
$\Rightarrow 2x \leq 8 \Rightarrow 2x+1 \leq 9 \Rightarrow x \in A$.

2) Sei X eine Menge und A eine Teilmenge von X. Sei

$$\bar{A} := \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Ist B eine weitere Teilmenge von X mit $A \subset B$, dann folgt $\bar{B} \subset \bar{A}$, denn sei $x \in \bar{B} \Rightarrow x \notin B$ $\Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \bar{A}$.

Operationen auf Mengen:

Seien $A, B \subset X$ Mengen, dann definiert man neue Mengen

$$A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

$$A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Ist $A \subset B$, so kann man noch definieren

$$B \setminus A := \{x \in X \mid x \in B \text{ und } x \notin A\}.$$

Es gilt z.B. die Regel

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

denn:

Sei $x \in A \cup (B \cap C)$.

Ist $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ist $x \in B \cap C \Rightarrow x \in B$ und $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$.

Sei umgekehrt $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dann folgt $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$.

Ist $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$.

Ist $x \notin A \Rightarrow x \in B$ und $x \in C \Rightarrow x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$.

Für Mengen A und B hat man ferner das sog. cartesische Produkt

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Hat man ein System $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von X, so definiert man allgemeiner

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X \mid \exists\, i \in I \text{ mit } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X \mid x \in A_i \ \forall\, i \in I\}$$

b) Relationen:

Seien A und B Mengen. Jede Teilmenge

$$R \subset A \times B$$

heißt eine Relation zwischen A und B.

Sei M eine Menge. Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt

i) reflexiv, falls $(x,x) \in R$ für alle $x \in M$

ii) symmetrisch, falls gilt

Ist $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

iii) antisymmetrisch, falls gilt

Ist $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R \Rightarrow x = y$.

iv) transitiv, falls gilt

Ist $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$.

Dementsprechend heißt $R \subset M \times M$ eine

1) Äquivalenzrelation auf M im Falle i), ii), iv)
Für $(x,y) \in R$ schreibt man dann $x \sim y$.

2) Ordnungsrelation auf M im Falle i), iii), iv)
Für $(x,y) \in R$ schreibt man hier $x \leq y$.

c) Abbildungen:

Seien A und B Mengen. Eine Relation $f \subset A \times B$ heißt Abbildung von A nach B, falls gilt

i) $\forall\, a \in A \ \exists\, b \in B$ mit $(a,b) \in f$

ii) Sind $(a,b), (a,b') \in f \Rightarrow b = b'$.

Das eindeutig bestimmte $b \in B$ mit $(a,b) \in f$ heißt Bild(punkt) von a unter f, und man schreibt $b = f(a)$.

Für den Sachverhalt "$f \subset A \times B$" schreibt man auch

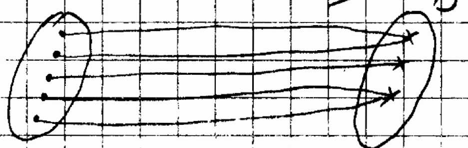
$$f: A \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto f(a)$$

Obige Definition einer Abbildung f von A nach B hat folgende naive Interpretation:

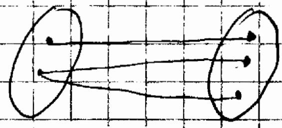
Eine <u>Abbildung</u> von A nach B ist eine Relation (= Zuordnungsvorschrift), derzufolge <u>jedem</u> $a \in A$ <u>genau ein</u> $b \in B$ zugeordnet wird.

Eine Abbildung kann z.B. so aussehen

$A \longrightarrow B$

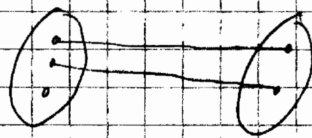


Jedoch sind



$A \longrightarrow B$

und



$A \longrightarrow B$

keine Abbildungen.

Beispielsweise ist auch

$$f: \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$\frac{a}{b} \longmapsto \frac{a-1}{b-1}$$

keine Abbildung, denn:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \text{aber} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \neq \frac{1}{3} = f\left(\frac{2}{4}\right).$$

Ebenso ist

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

keine Abbildung, da der 0 nichts zugeordnet wird.

Wenn man also zeigen will, daß eine Zuordnungsvorschrift $f: A \longrightarrow B$ eine Abbildung ist, so muss man verifizieren:

i) <u>Jeder</u> $a \in A$ besitzt einen Bildpunkt in B.

ii) Sind $a, a' \in A$ mit $a = a' \Longrightarrow f(a) = f(a')$.

Man sagt dann, f ist <u>wohldefiniert</u>.

Eine Abbildung $f: A \longrightarrow B$ heißt

i) surjektiv, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.

ii) injektiv, falls für $a, a' \in A$ gilt.

$$\text{Ist } f(a) = f(a') \implies a = a',$$

d.h. verschiedene Argumente besitzen verschiedene Bilder
$a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$.

iii) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist, d.h. zu jedem $b \in B$ gibt es genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

Seien A, B, C Mengen und $f: A \to B$, $g: B \to C$ Abbildungen, so erhält man eine neue Abbildung

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

mit $(g \circ f)(a) := g(f(a))$ für alle $a \in A$.

Es gilt:

1) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$.

2) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$

3) Ist $g \circ f$ injektiv, so auch f.

4) Ist $g \circ f$ surjektiv, so auch g.

Beweis:

1) Sei $c \in C$. Da g surjektiv, so gibt es ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da f surjektiv, so gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Also
$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

2) Seien $a, a' \in A$ mit $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Dann folgt $g(f(a)) = g(f(a'))$. Aus Injektivität von g folgt $f(a) = f(a')$ und aus der Injektivität von f folgt $a = a'$.

4) Sei $c \in C$. Wegen der Surjektivität von $g \circ f$ gibt es ein $a \in A$ mit $(g \circ f)(a) = c$. Setze $b := f(a) \in B$, dann gilt

$$g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = c.$$

Beispiele:

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

weder injektiv noch surjektiv

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$

surjektiv, jedoch nicht injektiv

$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

injektiv, jedoch nicht surjektiv

$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$

bijektiv

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x+5$

bijektiv, denn für $y \in \mathbb{R}$ setze $x := \frac{1}{2}(y-5)$ $\Rightarrow f(x) = y$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow [-3, \infty[$, $x \longmapsto 2x^2-3$

surjektiv, denn für jedes $y \geq -3$ ist $x := \sqrt{\frac{1}{2}(y+3)}$ Lösung für $f(x) = y$, jedoch nicht injektiv.

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$

surjektiv, jedoch nicht injektiv $\sin 0 = 0 = \sin \pi$

$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$

bijektiv

Sei M eine nicht-leere Menge. Eine <u>(innere) Verknüpfung</u> auf M ist eine Abbildung

$$M \times M \longrightarrow M.$$

Eine Verknüpfung

$$a * b \quad \text{für } a, b \in M$$

heißt <u>wohldefiniert</u>, falls die Zuordnungsvorschrift

$$M \times M \longrightarrow M$$
$$(a,b) \longmapsto a*b$$

wohldefiniert, also eine Abbildung ist.