b) Stetigkeit

Sei $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion mit nichtleerem Definitionsbereich D. Sei $a \in D$. f heißt **stetig in** a, falls gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

f heißt **stetig auf** D, wenn f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

f ist stetig genau dann, wenn

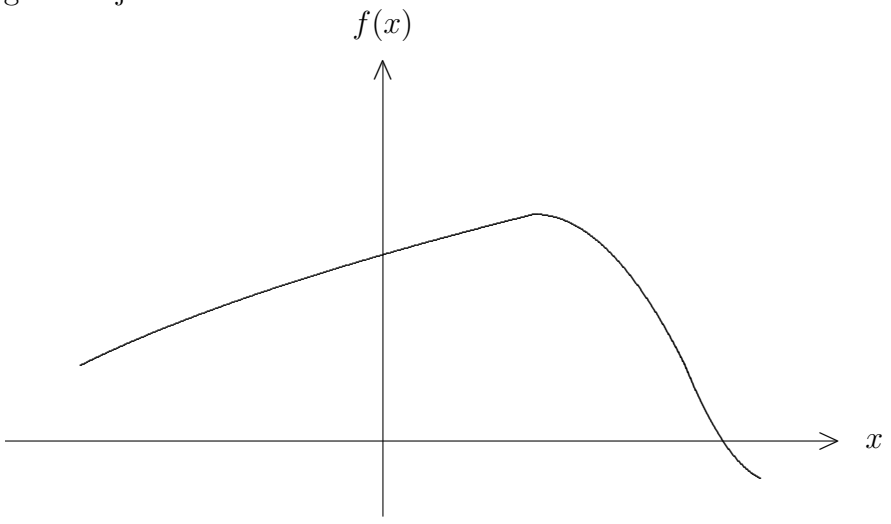
$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a-} f(x)$$

gilt.

Folgende Arten von Stetigkeit bzw. Unstetigkeitsstellen können auftreten:

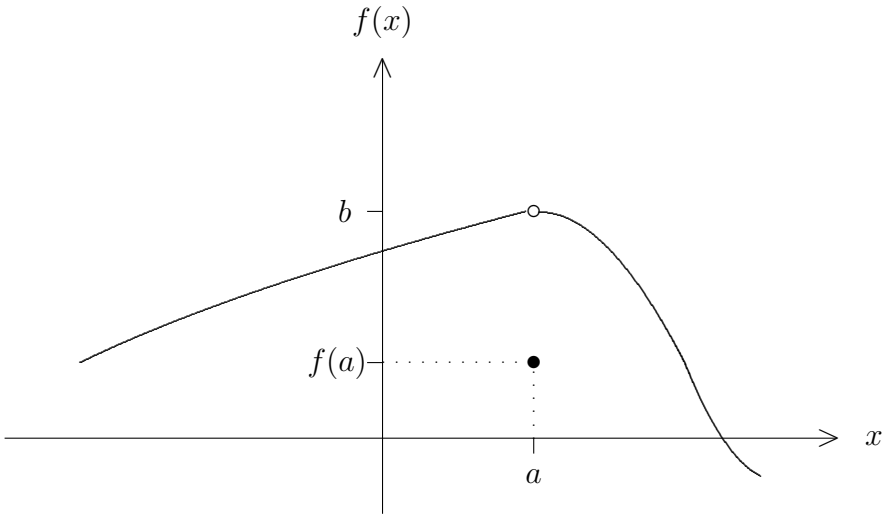
In den nachfolgenden Skizzen bezeichnet $\circ$ eine Lücke im Graphen von f, d. h. dieser Punkt gehört nicht zum Graphen von f. Der Punkt $\bullet$ hingegen gehört zum Graphen von f.

i) Stetigkeit in jedem Punkt



In jedem Punkt der obigen Funktion $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ trifft die in der Definition gegebene Stetigkeitsbedingung zu.

ii) Unstetigkeit in einem Punkt (Grenzwert im Punkt a existiert)

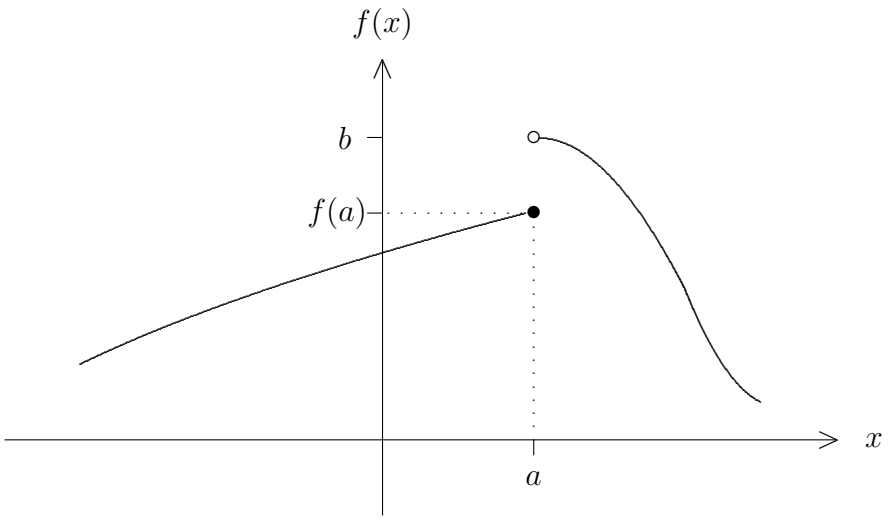


Die obige auf ganz $\mathbf{R}$ definierte Funktion f besitzt im Punkt a eine sog. Unstetigkeitsstelle. Ein Grenzwert b von f existiert zwar in a (da links- und rechsseitiger Grenzwert von f übereinstimmen), ist jedoch von $f(a)$ verschieden. Deshalb ist f in a unstetig.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b = \lim_{x \to a-} f(x)$$

Aus obiger Skizze ergibt sich jedoch $f(a) \neq b$.

iii) Unstetigkeit in einem Punkt (Linksseitige Stetigkeit in a)



Grenzwerte $f(a)$ und b der obigen auf ganz $\mathbf{R}$ definierten Funktion f existieren im Punkt a nur links- und rechtsseitig. Es gilt

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a) \text{ jedoch } \lim_{x \to a+} f(x) = b$$

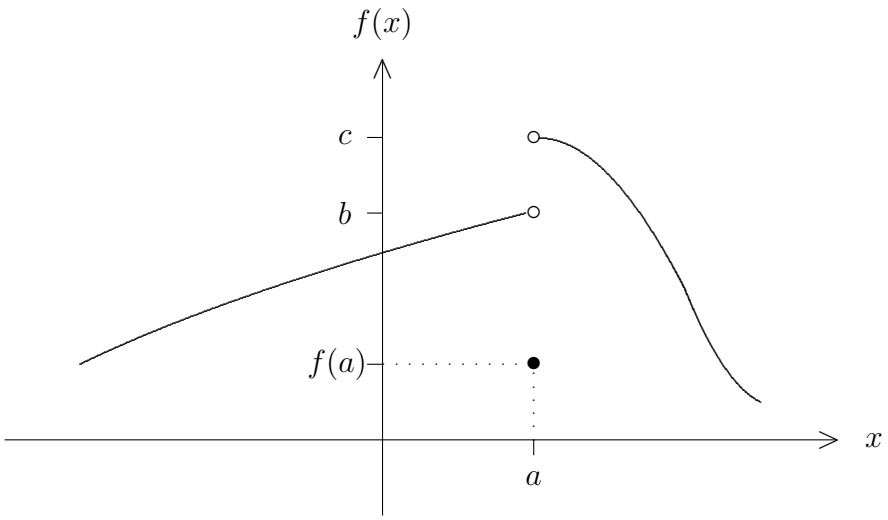
Wegen $f(a) \neq b$ ist f in a unstetig. Man sagt, f ist in a **linksstetig**.

Eine analoge Definition hat man für **rechtsstetige** Funktionen:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \text{ jedoch } \lim_{x \to a-} f(x) \neq f(a)$$

In diesem Fall wäre in der obigen Skizze der Punkt $\bullet$ oberhalb von $\circ$.

iv) Unstetigkeit in einem Punkt (Weder links- noch rechtsstetig in a)



Für die obige auf ganz $\mathbf{R}$ definierte Funktion f existieren im Punkt a nur einseitige Grenzwerte b und c, die jedoch nicht übereinstimmen. Daher ist f dort unstetig, nicht einmal einseitig stetig.

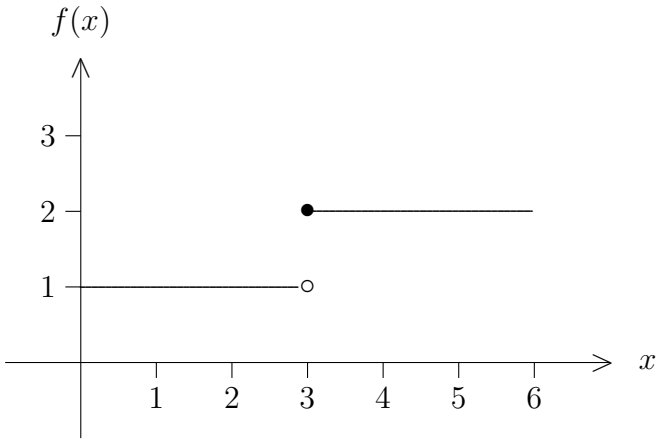
$$\lim_{x \to a-} f(x) = b \neq f(a) \neq c = \lim_{x \to a+} f(x)$$

Beispiele:

1) Rechtsseitige Stetigkeit

Die Funktion $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, \text{ falls } x < 3 \\ \\ 2, \text{ falls } x \geq 3 \end{cases}$$



Es gilt

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x\to 3+} f(x) = f(3)$$

daher ist f nicht stetig im Punkt 3.

2) Stetigkeit in jedem Punkt

Sei $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbf{N}$. Dann gilt für jedes $a \in \mathbf{R}$

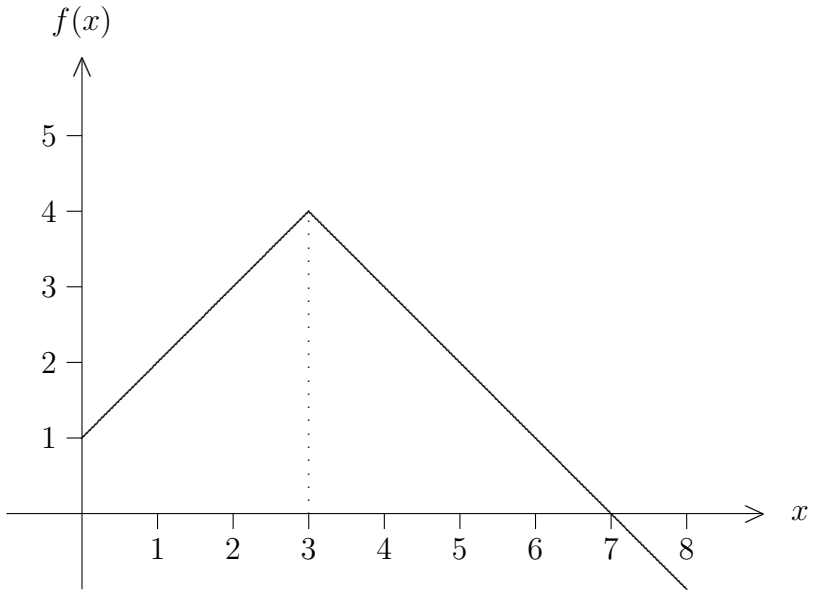
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^n = a^n = f(a)$$

Sind f und g stetige Funktionen, so sind auch $f + g, f - g, f \cdot g, \lambda \cdot f$ mit $\lambda \in \mathbf{R}$ stetig. Ebenso ist $\frac{f}{g}$ stetig in allen $x \in D$ mit $g(x) \neq 0$. Daher sind alle Poynomfunktionen und rationalen Funktionen stetig.

3) Die Funktion $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x + 1, \text{ falls } x < 3 \\ \\ 7 - x, \text{ falls } x \geq 3 \end{cases}$$

ist stetig. Die einzige kritische Stelle, die man auf Stetigkeit prüfen muß, ist der Punkt $x = 3$.



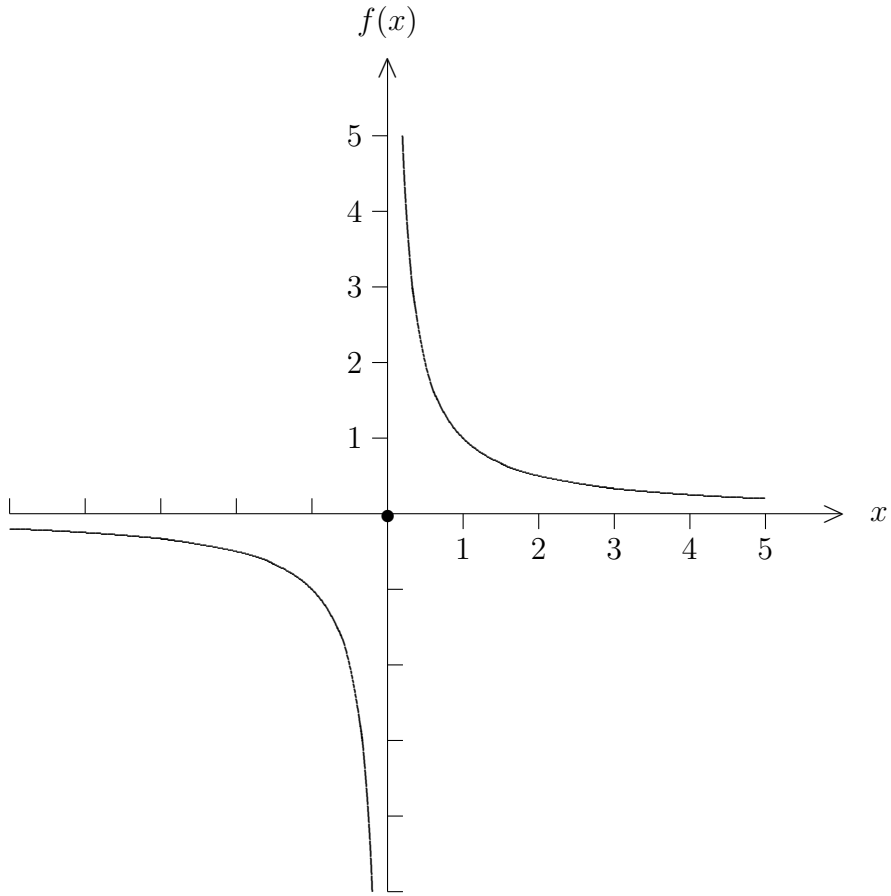
Es gilt

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-} (x+1) = 4 = \lim_{x\to 3+} (7-x) = \lim_{x\to 3+} f(x) = f(3)$$

4) Die Funktion $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ falls } x \neq 0 \\ \\ 0, \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$

ist unstetig im Nullpunkt.



Es gilt

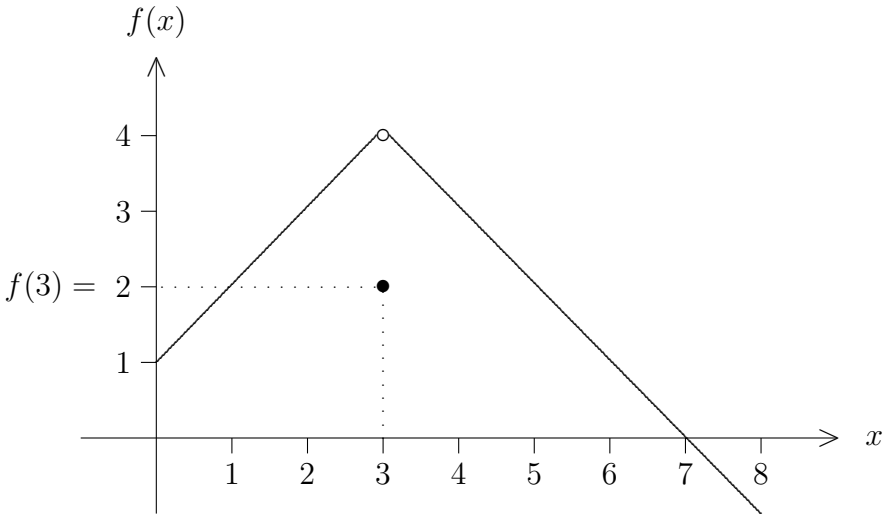
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ und } \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$$

jedoch $f(0) = 0$. Die Funktion ist also weder links- noch rechtsstetig.

5) Die Funktion $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{falls } x < 3 \\ 2 & \text{falls } x = 3 \\ 7-x & \text{falls } x > 3 \end{cases}$$

ist unstetig im Punkt $x = 3$.

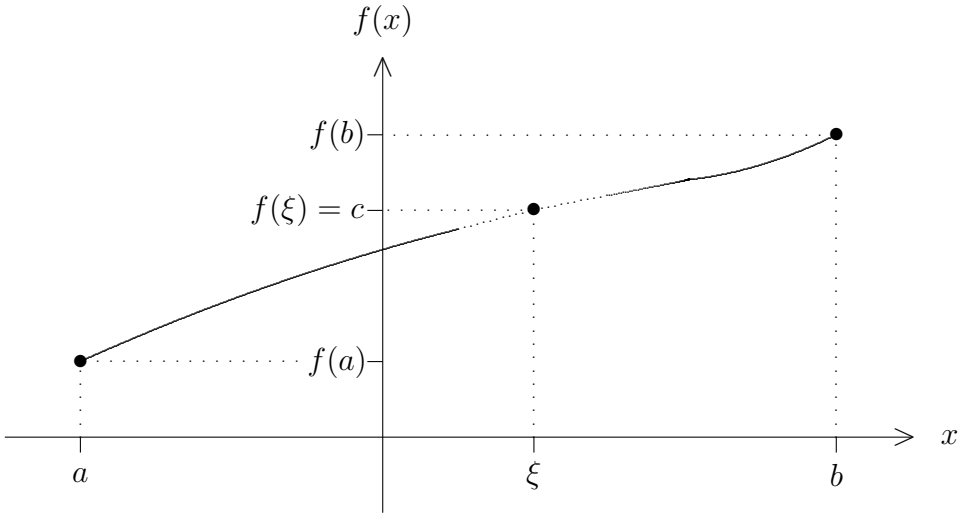


Es gilt zwar

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-} (x+1) = 4 = \lim_{x\to 3+} (7-x) = \lim_{x\to 3+} f(x)$$

jedoch hat man $f(3) = 2$.

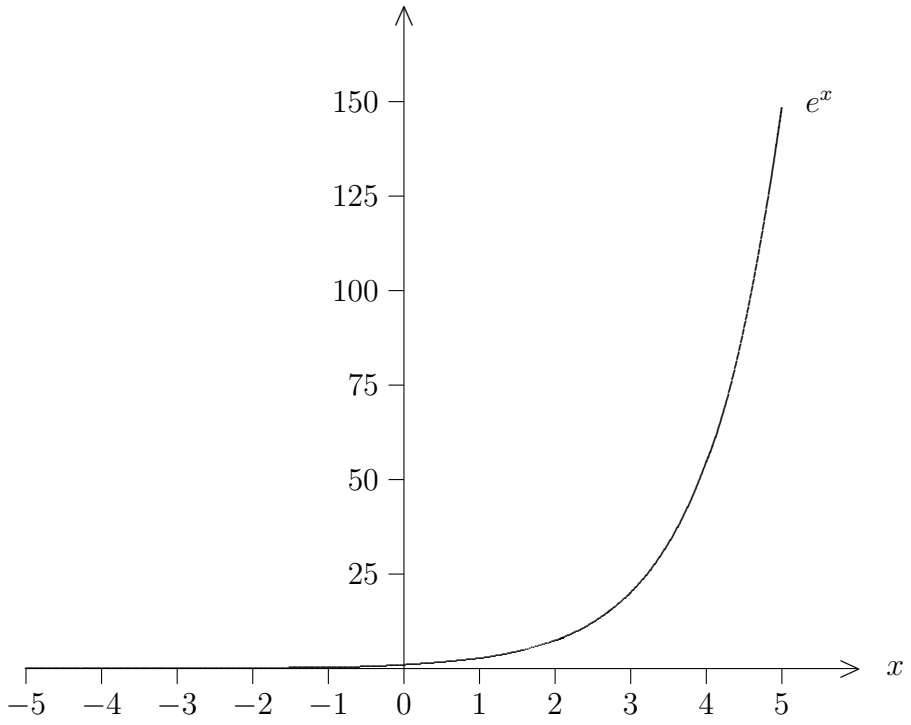
Zwischenwertsatz:
Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Sei $c \in \mathbf{R}$ mit $f(a) \leq c$ und $f(b) \geq c$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = c$.



Folgerung:

Wie wir bereits früher festgestellt haben, ist die Exponentialfunktion aufgrund ihrer strengen Monotonie injektiv. Nach dem Zwischenwertsatz ist sie auch surjektiv und damit bijektiv. Dies sieht man so ein:

Sei $c \in \mathbf{R}$ mit $c > 0$. Wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ gibt es ein $a \in \mathbf{R}$ mit $e^a \leq c$ und wegen $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$ gibt es ein $b \in \mathbf{R}$ mit $e^b \geq c$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $e^x = c$, daraus folgt die Surjektivität von exp.



Wir haben nun eingesehen, dass die Exponentialfunktion bijektiv ist. Demzufolge gibt es genau eine Umkehrfunktion

$$\log : \ ]0, \infty[\longrightarrow \mathbf{R}$$

den sog. **(natürlichen) Logarithmus**. Es gilt

$$e^{\log x} = x \text{ und } \log(e^x) = x \text{ für alle } x > 0 \text{ bzw. } x \in \mathbf{R}$$

Ferner gilt

$\log(1) = 0$ und $\log(e) = 1$

$\log(xy) = \log x + \log y$

log ist streng monoton wachsend und stetig

$\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$ und $\lim\limits_{x\to 0} \log x = -\infty$

Allgemeine Potenz:

Wir kennen bereits Potenzen mit natürlichen, ganzen und rationalen Exponenten und erinnern uns für $a > 0$ und $b > 0$

$a^n := a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (n Faktoren mit $n \in \mathbf{N}$)

$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ mit $n \in \mathbf{N}$, $a^0 := 1$

$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$ mit $m, n \in \mathbf{Z}$

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$, $(ab)^q = a^q \cdot b^q$ mit $p, q \in \mathbf{Q}$

Jetzt benötigen wir noch eine Potenzdefinition allgemein mit reellen Exponenten. Wir können beispielsweise den Ausdruck $a^{\sqrt{2}}$ mit den obigen Definitionen nicht beschreiben.

Sei nun $a > 0$ und $x \in \mathbf{R}$. Wir definieren nun den Ausdruck a^x mit Hilfe der Exponentialfunktion exp durch

$$a^x := e^{x \log a}$$

Hierüber gelten die folgenden Regeln ($a, b > 0$ und $x, y \in \mathbf{R}$)

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$(ab)^x = a^x \cdot b^x$

$a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (n Faktoren mit $n \in \mathbf{N}$)

Man betrachte nun die Gleichung (sog. Exponentialgleichung)

$$a^x = y$$

mit $a > 0, y > 0$ und $x \in \mathbf{R}$. Diese läßt sich mit Hilfe des Logarithmus wie folgt nach x auflösen:

$$\log y = \log a^x = \log e^{x \log a} = x \log a$$

daraus folgt dann

$$x = \frac{\log y}{\log a} =: \log_a y$$

letzteres nennt man "Logarithmus zur Basis a von y".

Sei nun $b > 0$ eine beliebige weitere Basis, dann gibt es genau ein $r \in \mathbf{R}$ mit $b^r = a$. Daraus folgt nach obiger Definition $r = \log_b a$ und somit

$$y = a^x = (b^r)^x = b^{rx} \Longrightarrow rx = \log_b y$$

daraus folgt schließlich

$$\log_a y = x = \frac{\log_b y}{r} = \frac{\log_b y}{\log_b a}$$

dies ist die sog. **Basisumrechnung von** a **nach** b. Man kann also zur Lösung einer Exponentialgleichung den Logarithmus zu jeder beliebigen Basis anwenden.

Beispiel:
Um die Gleichung $2^x = 8$ nach x aufzulösen, wähle man eine beliebige Basis $b > 0$ (am besten eine Basis, die auch für den Taschenrechner geeignet ist (z. B. $b = 2, b = e$ oder $b = 10$) und erhält

$$x\log_b 2 = \log_b 2^x = \log_b 8$$

und daraus schließlich

$$x = \frac{\log_b 8}{\log_b 2} = 3$$

In der Mathematik wird in der Regel der natürliche Logarithmus (zur Basis e) als ″Standardlogarithmus″ verwendet.

Eine Gleichung

$$10^x = 25 \cdot 2^x$$

würde man zunächst so umstellen

$$5^x = \left(\frac{10}{2}\right)^x = \frac{10^x}{2^x} = 25$$

und erhält daraus mit dem natürlichen Logarithmus

$$x\log 5 = \log 5^x = \log 25$$

und schließlich hieraus

$$x = \frac{\log 25}{\log 5} = 2$$

Wir kommen nun wieder zu unseren Grenzwertbetrachtungen zurück und behandeln wichtige Hilfsmittel zur Bestimmung von Grenzwerten, nämlich

c) Regeln von de l'Hospital

Ausgangsproblem:

Betrachtet werden nun Grenzwerte vom Typ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ mit } a\in\mathbf{R} \text{ bzw. } \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

wobei jedoch unbestimmte Ausdrücke entstehen wie z. B.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \text{ oder } \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

d. h. also

$$\frac{0}{0} \text{ bzw. } \frac{\infty}{\infty}$$

Dies hat man z. B. bei folgenden Grenzwerten

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$$

Die Regel von de l'Hospital lautet nun wie folgt:

Sei $I\neq\emptyset$ ein offenes Intervall mit rechtem Endpunkt $a\in\mathbf{R}$ oder $a=\infty$ (d. h. also $I=]b,a[$ mit $b\in\mathbf{R}$ oder $b=-\infty$). Seien ferner $f,g: I\longrightarrow\mathbf{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in I$. Es existiere

$$\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und wenigstens eine der folgenden Annahmen sollen zutreffen:

i) $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\lim\limits_{x\to a-} g(x)=0$

ii) $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\lim\limits_{x\to a-} g(x)=\infty$ oder $-\infty$.

Dann existiert und gilt

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dazu betrachten wir einige Beispiele:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(e^x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{1} = \infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{1} = 0$

5) $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin'(x)}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\cos(x)+\sin(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)-x\sin(x)+\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

7) $$\lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$$
$$= -\lim_{x\to 0} x = 0$$

8) $$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log x} = e^0 = 1$$

9) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x-1}{2x} = 2$$

10) $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \text{... usw.}$$

Hier führt die Regel nach de l'Hospital zu keinem Erfolg, stattdessen muß man hier so vorgehen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$$

11) $$\lim_{x\to\infty} x\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Daraus folgt

$$\lim_{x\to\infty} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = \lim_{x\to\infty} \exp\left(x\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\right)$$
$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\left(x\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\right)\right)$$
$$= \exp(1) = e$$

12) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

6. Lokale Extrema, der Mittelwertsatz

a) Extremwerte

Sei M eine nicht-leere Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbf{R}$. Ein Element $c \in \mathbf{R}$ heißt **obere Schranke** von M, falls $x \leq c$ für alle $x \in M$ gilt.
Das Element c heißt **untere Schranke** von M, falls $x \geq c$ für alle $x \in M$ gilt.
Man schreibt kurz $M \leq c$, falls c obere Schranke von M ist (M heißt dann **nach oben beschränkt**).
Entsprechend schreibt man kurz $M \geq c$, falls c untere Schranke von M ist (M heißt dann **nach unten beschränkt**).
Die Menge M heißt **beschränkt**, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Man beachte, dass obiges Element c nicht notwendig in M liegen muß.
Ist hingegen $c \in M$, so heißt c **Maximum** von M (oder auch **größtes Element** von M), falls $M \leq c$ gilt und schreibt dann kurz $c = \max(M)$. Es heißt hingegen **Minimum** von M (oder auch **kleinstes Element** von M), falls $M \geq c$ gilt und schreibt dann kurz $c = \min(M)$.
Allgemein sagt man, M besitzt ein **Extremum**, wenn M ein Maximum oder Minimum besitzt.

Definition:
Sei M eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbf{R}$.

i) Ein Element $s \in \mathbf{R}$ heißt **Supremum** von M, falls
   a) s obere Schranke von M ist und
   b) für jedes $c \in \mathbf{R}$ mit $M \leq c$ folgt $s \leq c$
   Man schreibt $s = \sup(M)$.

ii) Ein Element $i \in \mathbf{R}$ heißt **Infimum** von M, falls
   a) i untere Schranke von M ist und
   b) für jedes $c \in \mathbf{R}$ mit $M \geq c$ folgt $i \geq c$
   Man schreibt $i = \inf(M)$.

Gilt $s \in M$ bzw. $i \in M$, so ist $s = \max(M)$ bzw. $i = \min(M)$, d. h. das Supremum ist eine Verallgemeinerung des Maximums und entsprechend das Infimum eine Verallgemeinerung des Minimums. M. a. W. jedes Maximum

ist ein Supremum und jedes Minimum ist ein Infimum aber nicht umgekehrt! Nach obiger Definition ist $\sup(M)$ die kleinste obere Schranke von M, und $\inf(M)$ ist die größte untere Schranke von M.

Ist

$$\mathcal{O}(M) := \{c \in \mathbf{R} | M \leq c\} \text{ bzw. } \mathcal{U}(M) := \{c \in \mathbf{R} | c \leq M\}$$

die Menge der oberen Schranken $\mathcal{O}(M)$ bzw. der unteren Schranken $\mathcal{U}(M)$, von M, so gilt nach obiger Definition

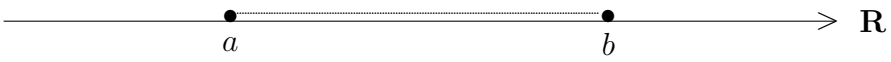
$$\sup(M) = \min(\mathcal{O}(M)) \text{ und } \inf(M) = \max(\mathcal{U}(M))$$

Beispiele:

Für Elemente $a, b \in \mathbf{R}$ definiert man die folgenden Intervalle:

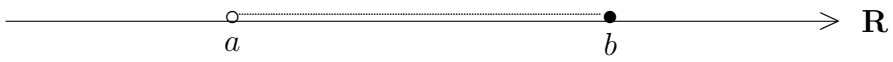
$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\} \\ [a,b[&:= \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\} \\ ]a,b] &:= \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\} \\ ]a,b[&:= \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\} \end{aligned}$$

Das Intervall $[a, b]$ besitzt a als Minimum und b als Maximum.

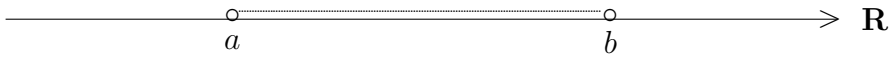


Das Intervall $[a, b[$ besitzt a als Minimum und b als Supremum, jedoch kein Maximum.

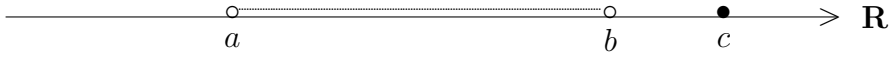
Das Intervall $]a, b]$ besitzt a als Infimum und b als Maximum, jedoch kein Minimum.



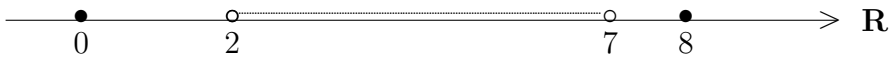
Das Intervall $]a, b[$ besitzt a als Infimum und b als Supremum, jedoch weder ein Minimum noch ein Maximum.



In allen Fällen ist a (größte) untere Schranke und b (kleinste) obere Schranke des jeweiligen Intervalls.
In der nachfolgenden Skizze ist zusätzlich eine weitere obere Schranke c für das Intervall $]a, b[$ eingezeichnet, die jedoch kein Supremum des Intervalls ist.



Für das Intervall $M =]2, 7[$ ist z. B. das Element 8 auch eine obere Schranke für M, jedoch weder Maximum noch Supremum. Entsprechend ist das Element 0 untere Schranke für M, jedoch weder Minimum noch Infimum. Hingegen gilt $\sup(M) = 7$ und $\inf(M) = 2$. Das Intervall M besitzt aber weder Maximum noch Minimum!



b) Lokale Extrema

Sei $D \subset \mathbf{R}$ nicht-leer und $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion. Man definiert im Falle der Existenz die folgenden Werte

$$\begin{array}{lrcl} \text{i)} & \max(f) & := & \max\{f(x)|x \in D\} \\ \text{ii)} & \min(f) & := & \min\{f(x)|x \in D\} \\ \text{iii)} & \sup(f) & := & \sup\{f(x)|x \in D\} \\ \text{iv)} & \inf(f) & := & \inf\{f(x)|x \in D\} \end{array}$$

Im Fall i) spricht man von einem **(globalen) Maximum** von f, im Fall ii) von einem **(globalen) Minimum** von f, allgemein spricht man von einem **(globalen) Extremum** von f, wenn Fall i) oder ii) vorliegt.

In der Differentialrechnung interessiert man sich sehr häufig für Extrema von f, die sich lediglich auf einen bestimmten Teilbereich $T \subset D$ beziehen. Dann erhält man im Falle der Existenz z. B. mit

$$\max(f|T) := \max\{f(x)|x \in T\}$$

ein sog. lokales Maximum von f, das jedoch kein Maximum des gesamten Bildbereiches von f sein muß!
Hierzu hat man folgende genauere

Definition:
Sei $D \subset \mathbf{R}$ nicht leer und $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion. Sei $c \in D$. Man sagt $''f$ hat in c ein **lokales Maximum (bzw. Minimum)**$''$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f(x) \leq f(c) \ \Big(\text{bzw. } f(x) \geq f(c)\Big)$$

für alle $x \in D$ mit $|x - c| < \delta$. Es ist dann

$$f(c) = \max\{f(x)|x \in D \text{ mit } |x - c| < \delta\} \textbf{ lokales Maximum}$$

bzw. im Klammerfall

$$f(c) = \min\{f(x)|x \in D \text{ mit } |x - c| < \delta\} \textbf{ lokales Minimum}$$

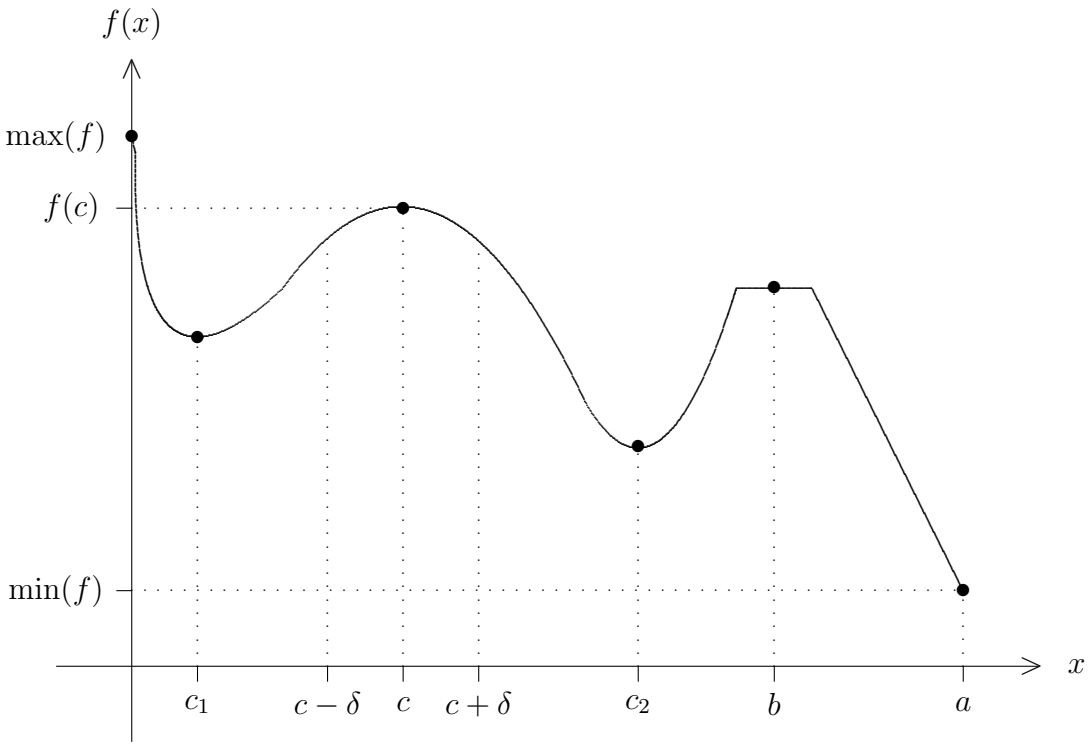
von f. Allgemein nennt man dann $f(c)$ **lokales Extremum** von f.

Gilt in obiger Definition

$$f(x) < f(c) \ \Big(\text{bzw. } f(x) > f(c)\Big)$$

für alle $x \in D$ mit $0 < |x-c| < \delta$, so spricht man von einem **isolierten lokalen Maximum (bzw. Minimum)** oder allgemeiner von einem **isolierten lokalen Extremum**. Im isolierten Fall gibt es also **kein weiteres** $c' \in D$ mit $|c'-c| < \delta$ und $f(c') = f(c)$, d. h. c ist in seiner δ-Umgebung der einzige Punkt, in dem f ein lokales Extremum besitzt.

Die folgende Skizze möge dies noch einmal verdeutlichen:



Wie man in der Skizze sieht, hat die dort dargestellte Funktion

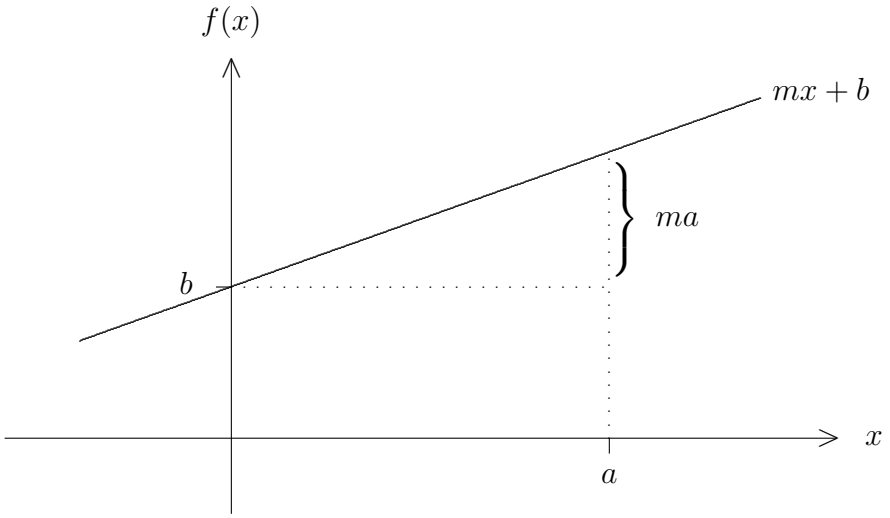
$$f : [0, a] \longrightarrow \mathbf{R}$$

im Punkt 0 ein globales Maximum $\max(f) = f(0)$ und im Punkt a ein globales Minimum $\min(f) = f(a)$. Gemäß der obigen Definition sind globale Extrema gleichzeitig auch lokale Extrema (aber nicht umgekehrt)!
Im Punkt c besitzt f ein isoliertes lokales Maximum $f(c)$.
Wegen $f(c) < \max(f)$ ist dieses jedoch nicht global. Nach obiger Skizze ist $f(c)$ das größte Element unter den Werten $f(x)$ allerdings z. B. nur für alle x im Intervall $]c-\delta, c+\delta[$. Man könnte dieses Intervall natürlich noch weiter

ausdehnen:
$f(c)$ wäre in unserem Fall auch für $\delta = c - c_1$, d. h. also bezogen auf das Intervall $]c_1, 2c - c_1[$ maximal.
Im Punkt b besitzt f auch ein lokales Maximum, jedoch nicht isoliert, denn in jeder noch so kleinen Umgebung von b findet man immer einen Punkt b' mit $f(b) = f(b')$.
In den Punkten c_1 und c_2 besitzt f isolierte lokale Minima, denn man könnte auch um diese Punkte geeignete Umgebungen finden bezüglich derer $f(c_1)$ bzw. $f(c_2)$ minimal sind.

c) Kurvendiskussion

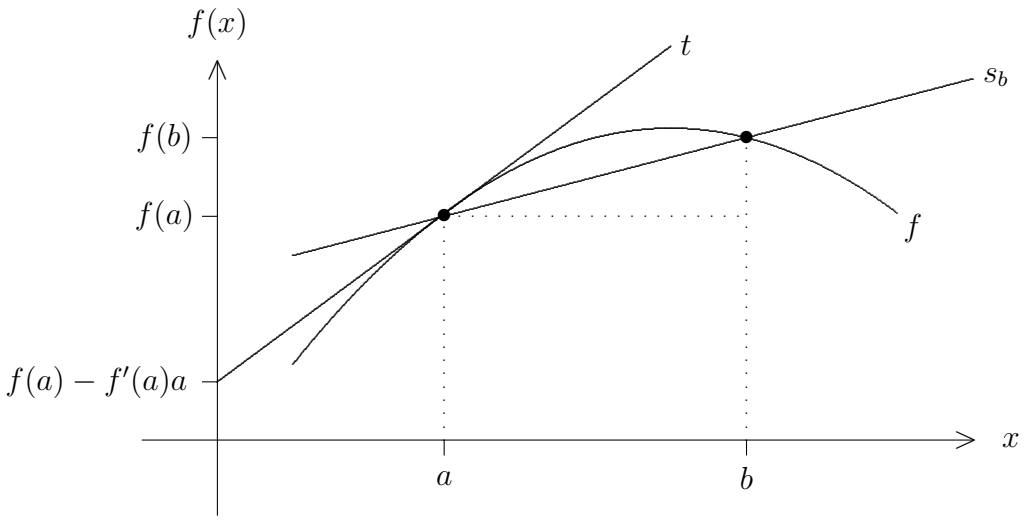
Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen lokalen Extrema und Differentialrechnung herstellen aber auch weitere Anwendungen der Differentialrechnung behandeln. Zunächst erinnern wir uns, wie die Ableitung einer Funktion entsteht. Wie wir bereits wissen, geht es um die Steigung der Funktion in einem bestimmten Punkt. Bei einer linearen Funktion ist die Definition der Steigung kein großes Problem. Dazu nochmals eine Skizze:



Die Steigung der oben skizzierten Funktion ist definiert als Quotient

$$m = \frac{ma}{a} = \frac{f(a) - b}{a}$$

Es handelt sich um die Steigung der Funktion im Nullpunkt. Indem man das eingezeichnete Steigungsdreieck entsprechend verschiebt stellt man fest, dass die Steigung in jedem anderen Punkt als im Nullpunkt gleich groß ist.
Ebenso ist uns bekannt, dass die Steigung einer beliebigen differenzierbaren Funktion in einem bestimmten Punkt als Steigung der Tangente an diesen Punkt definiert ist. Man betrachte dazu nochmals die nachfolgende Skizze:



Wir kennen bereits die Ableitung von f bei a, die wie folgt definiert ist

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Zur Bestimmung der Tangentengleichung (d. h. der Funktionsgleichung der Tangente t, nämlich $t(x) = mx + c$) im Punkt a muß folgendes gelten:

i) $m = t'(a) = f'(a)$

ii) $f(a) = t(a)$

Daraus folgt

$$f(a) = t(a) = f'(a)a + c \Longrightarrow c = f(a) - f'(a)a$$

Damit erhält man

$$t(x) = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Für die Bestimmung der Sekantengleichung $s_b(x) = mx + c$ muß gelten

i) $ma + c = s_b(a) = f(a)$

ii) $mb + c = s_b(b) = f(b)$

Daraus erhält man

$$m(b-a) = f(b) - f(a) \Longrightarrow m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

und

$$c = f(a) - ma = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a$$

Somit

$$\begin{aligned} s_b(x) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

und man sieht sofort:

$$\lim_{b\to a} s_b(x) = f'(a)(x-a) + f(a) = t(x)$$

Die Tangente t ergibt sich also als Grenzwert der Sekante s_b, wobei b gegen a strebt.

Zur Bestimmung der Tangentengleichung ist es nicht ratsam, die allgemeine Tangentengleichung auswendig zu lernen. Vielmehr sollte man sich über die o. g. Bedingungen klarwerden, die zur Tangentengleichung führen. Diese sind aber recht einleuchtend! Dazu ein kurzes

Beispiel:
Man bestimme die Tangente $t(x)$ an die Kurve der Funktion

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 1$$

an der Stelle $x = 2$. Man braucht dazu zunächst die Ableitung von f:

$$f'(x) = 6x + 5 \text{ und } f'(2) = 17$$

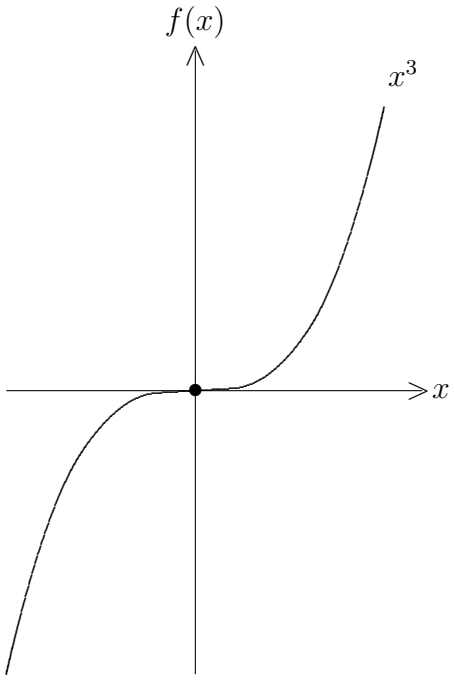
Wegen $t'(2) = f'(2) = 17$ kennt man damit die Steigung der Tangente, nämlich 17, diese ist ja an allen Stellen der Tangente gleich groß. Zur Berechnung des y-Achsenabschnittes der Tangente löst man einfach die Gleichung

$21 = f(2) = t(2) = 17 \cdot 2 + c = 34 + c$ nach c auf und erhält $c = 21 - 34 = -13$ und damit die Tangentengleichung $t(x) = 17x - 13$.
Würde man stattdessen die obige allgemeine Tangentengleichung verwenden, so erhält man $t(x) = 17(x - 2) + 21$, also dasselbe wie oben.

Wir charakterisieren nun lokale Extrema mit Hilfe der Differentialrechnung. Es gilt nämlich der folgende

Satz (notwendiges Kriterium für lokale Extrema):
Sei $f :]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion, die in $c \in]a, b[$ differenzierbar ist. Hat f in c ein lokales Extremum, so gilt $f'(c) = 0$.

Die Umkehrung ist falsch! Man betrachte etwa die Funktion $f(x) = x^3$, die im Nullpunkt Steigung 0 hat aber an dieser Stelle kein lokales Extremum besitzt, sondern lediglich einen sog. Sattelpunkt •



Satz (hinreichendes Kriterium für lokale Extrema):
Sei $f :]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion und $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$. Sei zusätzlich die Ableitung f' in c differenzierbar. Dann gilt:

i) $f''(c) > 0 \Longrightarrow$ f hat in c ein isoliertes lokales Minimum

ii) $f''(c) < 0 \Longrightarrow$ f hat in c ein isoliertes lokales Maximum

Im Fall $f'' > 0$ sagt man f ist **linksgekrümmt** oder **konvex**. Im Fall $f'' < 0$ sagt man f ist **rechtsgekrümmt** oder **konkav**.

Allgemeineres Kriterium für lokale Extrema:
Sei $f :]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ an der Stelle $x \in]a, b[$ beliebig oft differenzierbar und es sei $f'(x) = 0$. Sei ferner

$$n := \min\{m \in \mathbf{N} | f^{(m)}(x) \neq 0\}$$

dann gilt

i) n gerade $\Longrightarrow$ f hat bei x ein lokales Extremum, nämlich
ein isoliertes lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x) > 0$
ein isoliertes lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x) < 0$

ii) n ungerade $\Longrightarrow$ f besitzt bei x einen Sattelpunkt.

Dabei ist die höhere Ableitung einer Funktion f wie folgt definiert:

$$\begin{cases} f^{(0)}(x) & := & f(x) \\ f^{(n+1)}(x) & := & (f^{(n)})'(x) \text{ für } n \geq 0 \end{cases}$$

d. h. also $f^{(2)}(x) = (f')'(x) = f''(x), f^{(3)}(x) = (f^{(2)})'(x) = f'''(x)$ ... usw. Man spricht bei $f^{(n)}(x)$ von der n-ten Ableitung von f bei x.

Beispiele:

1) Sei $f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$, also $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2 > 0$. Nach obigem Kriterium hat f bei 0 ein isoliertes lokales Minimum.

2) Mit $f(x) = x^3$ hat man $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, daher $f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) = 6 \neq 0$. Man sieht also

$$3 = \min\{m \in \mathbf{N} | f^{(m)}(x) \neq 0\}$$

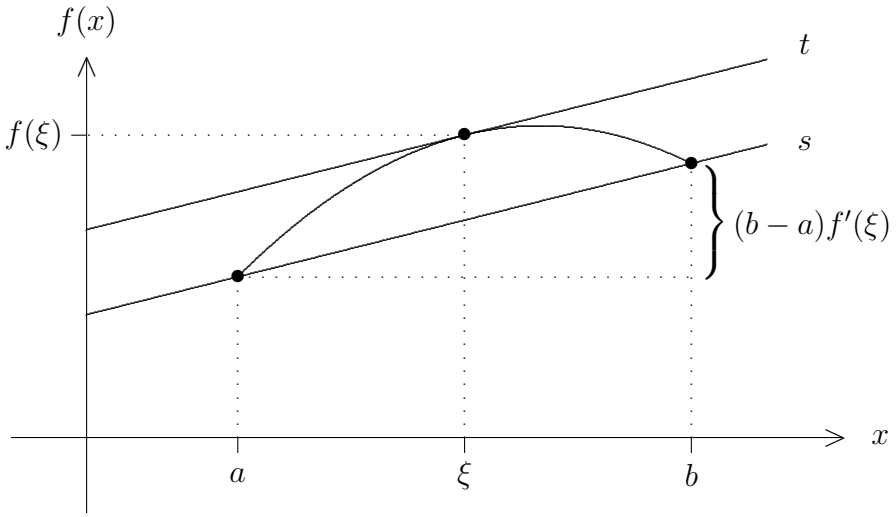
mit anderen Worten 3 ist das erste m, für das $f^{(m)}(x) \neq 0$ ist. Da 3 ungerade, so hat f bei 0 kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

3) Sei nun $f(x) = x^4$. Dann $f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2, f'''(x) = 24x$, $f^{(4)} = 24$. Damit $f^{(m)}(0) = 0$ für $1 \leq m \leq 3$ und $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Da 4 gerade ist, so hat f bei 0 ein striktes lokales Minimum.

4) Allgemein kann man für $f(x) = x^n$ sagen: Ist n gerade, so hat f bei 0 ein striktes lokales Minimum. Ist n hingegen ungerade, so hat f bei 0 einen Sattelpunkt.

Mittelwertsatz:
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$$



Im Grunde genommen besagt der Mittelwertsatz nichts anderes als die Tatsache, daß zur Sekante s durch die Kurve einer differenzierbaren Funktion f eine parallele Tangente an die Kurve von f existiert. Die Gleichung im Mittelwertsatz kann man auch so hinschreiben

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

wobei rechts die Steigung der Sekante s steht.

Folgerung 1:
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$, dann ist f konstant, denn:

Für jedes $x \in]a, b[$ gibt es nach dem MWS, angewandt auf das Intervall $[a, x]$ ein $\xi \in]a, x[$ mit

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi) = 0 \Longrightarrow f(x) = f(a)$$

also ist f konstant.

Folgerung 2:
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar. Dann gilt

i) $f'(x) \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für alle $x \Longrightarrow f$ monoton wachsend (bzw. fallend)

ii) $f'(x) > 0$ (bzw. < 0) für alle $x \Longrightarrow f$ streng monoton wachsend (bzw. fallend)

denn:
Sind $x, y \in]a, b[$ mit $x < y$, dann gibt es nach dem MWS ein $\xi \in]x, y[$ mit

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(\xi)$$

daraus folgen die Behauptungen (beachte $y - x > 0$).

Wir kommen nun zu einem weiteren wichtigen Bestandteil von Kurvendiskussionen, nämlich den Wendepunkten. Salopp gesagt ist ein Wendepunkt eine Stelle, an der sich die Krümmung einer Kurve ändert, also von rechtsgekrümmt zu linksgekrümmt oder umgekehrt. Hierzu eine genauere Definition:

Sei $f :]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Man sagt f hat in x_0 einen **Wendepunkt**, wenn sich die Krümmung der Kurve von f im Punkt x_0 ändert, d. h.

$$f''(x) < 0 \text{ für alle } x < x_0 \text{ und } f''(x) > 0 \text{ für alle } x > x_0$$

oder

$$f''(x) > 0 \text{ für alle } x < x_0 \text{ und } f''(x) < 0 \text{ für alle } x > x_0$$

Hinreichendes Kriterium:
Sei nun $f :]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ an der Stelle $x_0 \in]a, b[$ dreimal differenzierbar. Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f bei x_0 einen Wendepunkt.

Oder allgemeiner:
Gilt $f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und ist n ungerade, so hat f bei x_0 einen Wendepunkt.

Bemerkung:
Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ alleine ist zwar notwendig, jedoch nicht hinreichend für einen Wendepunkt. Man betrachte etwa die Funktion $f(x) = x^4$, dann ist, wie wir in Bsp. 3 gesehen haben $f''(0) = 0$ aber auch $f'''(0) = 0$ und damit hat f bei 0 keinen Wendepunkt, sondern ein lokales Minimum, wie oben gezeigt.

Anwendungsbeispiele

1) Vorgegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 14x + 15$$

Die Ableitungen ergeben

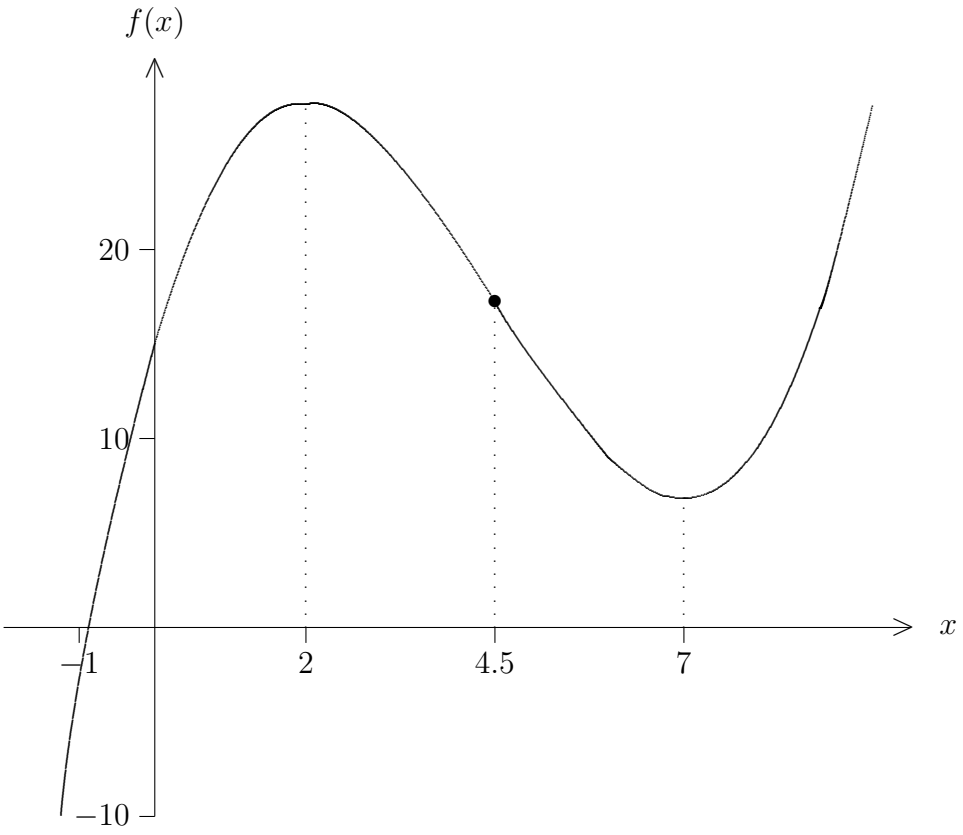
$$\begin{cases} f'(x) &= x^2 - 9x + 14 \\ f''(x) &= 2x - 9 \\ f'''(x) &= 2 \end{cases}$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ besitzt zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 2$ und $x_2 = 7$, wie man leicht nachrechnet. Wir wissen zunächst, dass an diesen Stellen die Steigung der Kurve von f Null ist. Wegen

$$f''(2) = 4 - 9 = -5 < 0 \text{ und } f''(7) = 14 - 9 = 5 > 0$$

haben wir bei $x = 2$ ein striktes lokales Maximum und bei $x = 7$ ein striktes lokales Minimum.
Zur Untersuchung des Monotonieverhaltens von f betrachten wir die faktorisierte Gleichung $f'(x) = (x-2)(x-7)$. Monoton wachsend ist f für alle x mit $f'(x) \geq 0$, d. h. wenn $x \geq 7$ oder $x \leq 2$ ist. Monoton fallend ist f für alle x mit $f'(x) \leq 0$, d. h. für alle x mit $2 \leq x \leq 7$.

Aus der Gleichung $f''(x) = 0$ erhält man $x = \frac{9}{2} = 4,5$. Wegen $f''' \neq 0$ hat man dort also einen Wendepunkt.
Als weiteres Ergebnis können wir also festhalten, dass f im Bereich $x < 4,5$ wegen $f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt (konkav) und im Bereich $x > 4,5$ wegen $f''(x) > 0$ linksgekrümmt (konvex) ist.



2) Vorgegeben ist nun die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

Zu untersuchen ist die Funktion auf lokale Extrema, Wendepunkte, Monotonieverhalten, Krümmungsverhalten auf Teilintervallen. Man bestimme auch die Wertemenge $f(\mathbf{R}) := \{f(x)|x \in \mathbf{R}\}$.

Berechnung der 1. Ableitung ergibt

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2} \quad \begin{cases} < & 0 & \text{für} & x & > & 0 \\ = & 0 & \text{für} & x & = & 0 \\ > & 0 & \text{für} & x & < & 0 \end{cases}$$

daraus folgt

f ist auf $]-\infty, 0]$ streng monoton wachsend

f ist auf $[0, \infty[$ streng monoton fallend

Ferner gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2(x^2+3)^2 - 2x2(x^2+3)2x}{(x^2+3)^4} \\ &= -\frac{2(x^2+3) - 8x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3} \\ &= \frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} > & 0 & \text{für} & x > 1 \text{ oder } x < -1 \\ = & 0 & \text{für} & x = 1 \text{ oder } x = -1 \\ < & 0 & \text{für} & -1 < x < 1 \end{cases}$$

Hieraus folgt:
Wegen $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$ hat f bei 0 ein striktes lokales Maximum (wegen der Monotonie sogar ein globales Maximum) und ist

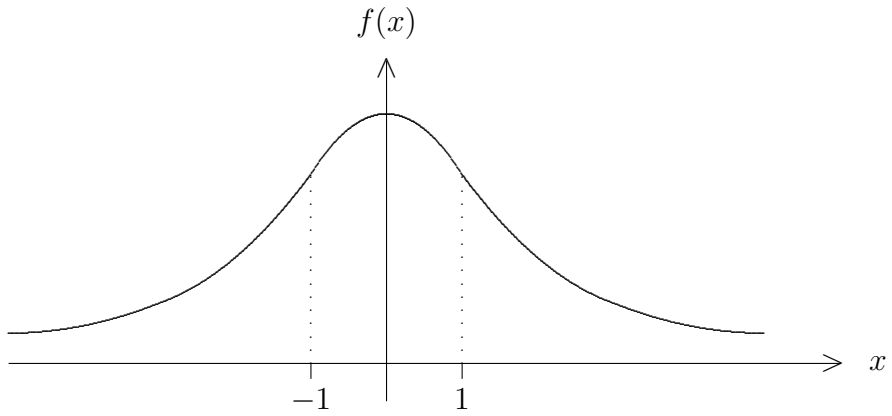
auf $]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,\infty[$ linksgekrümmt (konvex)

auf $]-1,1[$ rechtsgekrümmt (konkav)

Daraus folgt, dass f bei $+1$ und -1 Wendepunkte besitzt. Ferner gilt

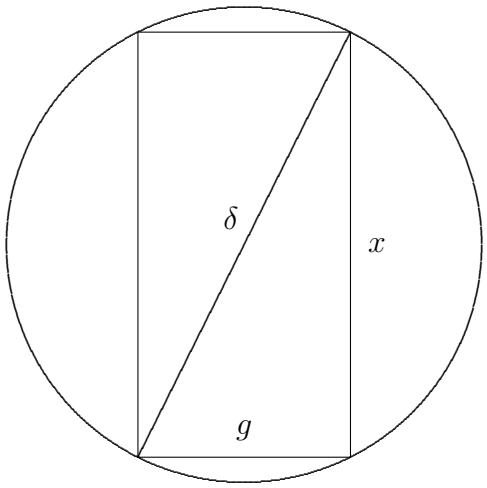
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \text{ und } \max(f) = f(0) = \frac{1}{3}$$

Wegen der Stetigkeit von f folgt aus dem Zwischenwertsatz $f(\mathbf{R}) =]0, \frac{1}{3}]$.



3) Praktische Anwendung

Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt gefertigt werden, so dass möglichst wenig Abfall entsteht.



Zu maximieren ist die Fläche des einbeschriebenen Rechtecks $A(x) = xg$.
Aus $x^2 + g^2 = \delta^2$ folgt

$$A^2(x) = x^2 g^2 = x^2(\delta^2 - x^2) = x^2\delta^2 - x^4$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A^2(x) = 2A(x)A'(x) \text{ und } A(x) \neq 0 \text{ für alle } x > 0$$

gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A^2(x) = 0 \Longleftrightarrow A'(x) = 0$$

d. h. wir können die Extremwertaufgabe auf $A^2(x)$ anwenden (dann wird das Rechnen einfacher!). Wir lösen also die Gleichung

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A^2(x) = 2x\delta^2 - 4x^3$$

und erhalten

$$x = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}A^2(x) = 2\delta^2 - 12x^2 \text{ und } \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}A^2\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right) = -4\delta^2 < 0$$

ist $A^2(x)$ und damit wegen $A(x) > 0$ auch $A(x)$ bei $x = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ maximal.
Ferner hat man

$$g = \sqrt{\delta^2 - x^2} = \sqrt{\delta^2 - \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\delta^2 - \frac{\delta^2}{2}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

d. h. der Querschnitt des Balkens ist quadratisch. □

Vorlesung vom 17.01., 23.01. und 24.01.2002
gehalten an der Fachhochschule Regensburg
für den Fachbereich Maschinenbau, 1. Semester

© 2002 Siegmar Dietrich