Lösungen zu Blatt 7: "Entwurf" 1

Afg 1:

$$f'(x) = (6-2x)e^{6x-x^2-9}$$

$$f''(x) = -2e^{6x-x^2-9} + (6-2x)^2 e^{6x-x^2-9}$$

$$= \left((6-2x)^2 - 2\right)e^{6x-x^2-9}$$

$$f'(x) = 0 \iff 6-2x = 0 \iff x = 3$$

d.h. f hat bei $x=3$ eine kritische Stelle.

$f''(3) = -2e^0 = -2 < 0 \Rightarrow f$ hat bei $x=3$ ein lokales Maximum

wegen $f'(x) > 0$ für $x < 3 \Rightarrow f$ monoton steigend auf $]-\infty, 3[$
und $f'(x) < 0$ für $x > 3 \Rightarrow f$ monoton fallend auf $]3, \infty[$
ist das lokale Maximum auch ein globales Maximum und es gilt

$$\max f = f(3) = 1$$

Weiter gilt:

x Wendepunkt $\iff f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Es ist

$$f''(x) = 0 \iff (6-2x)^2 - 2 = 0$$

$$\iff (6-2x)^2 = 2$$

$$\iff x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(6 \pm \sqrt{2}\right) = 3 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d.h. $f''(x) = 4\left(x-3-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{6x-x^2-9}$

$$\Rightarrow \quad f''(x) \text{ ist } \begin{cases} > 0, & \text{falls } x > 3+\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } x < 3-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ < 0, & \text{falls } 3-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 3+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ hat bei $x_1 = 3+\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_2 = 3-\frac{1}{\sqrt{2}}$ Wendepunkte

Ferner gilt:

$f(x) = e^{-(x-3)^2}$ und daher

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Aufg 2:

$f'(x) = 3x^2 + 6x$, $f''(x) = 6x + 6$, $f'''(x) = 6$

a) $f'(x) = 0 \iff x(3x+6) = 3x^2 + 6x = 0$

$\iff x_1 = 0$, $x_2 = -2$

f hat kritische Stellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$

$\begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow f \text{ hat bei } 0 \text{ lokales Minimum} \\ f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow f \text{ hat bei } -2 \text{ lokales Maximum} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{lok Max von } f = f(-2) = -8 + 12 + 1 = 5 \\ \text{lok Min von } f = f(0) = 1 \end{cases}$

Zu den Wendepunkten:

$f''(x) = 0 \iff x = -1$

Wegen $f'''(x) \neq 0$ hat f bei $x = -1$ einen Wendepunkt.

b) $f'(x) = x(3x+6)$ $\begin{cases} > 0 \text{ falls } x > 0 \text{ oder } x < -2 \\ < 0 \text{ falls } -2 < x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ ist monoton wachsend auf }]-\infty,-2] \cup [0,\infty[\\ f \text{ ist monoton fallend auf } [-2;0] \end{cases}$

c) Sei t_1 die Tangente an den Punkt $P_1 = (1;5)$

t_2 " " " " Wendepunkt $P_2 = (-1;3)$

zunächst $t_1(x) = mx+b$

I. $m+b = t_1(1) = f(1) = 5$

II. $m = t_1'(1) = f'(1) = 3+6 = 9$

$9+b = 5 \Rightarrow b = -4$

$\Rightarrow t_1(x) = 9x-4$

jetzt $t_2(x) = mx+b$

I. $-m+b = t_2(-1) = f(-1) = 3$

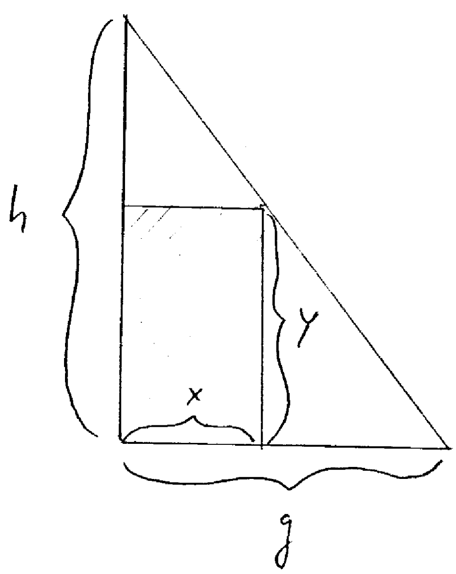
II. $m = t_2'(-1) = f'(-1) = -3$

$3+b = 3 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow t_2(x) = -3x$

Afg 3: siehe auch http://siegdiet.bei.t-online.de → Mathematik → Geom. Spielereien → Flächenmaximierung

Skizze:



Strahlensatz:

$$\frac{h}{g} = \frac{y}{g-x}$$

$$\Rightarrow y = (g-x)\frac{h}{g}$$

zu maximieren ist die Fläche

$$A(x) = xy = x(g-x)\frac{h}{g} = xh - x^2\frac{h}{g}$$

$$A'(x) = h - 2x\frac{h}{g}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{g}{2} \Rightarrow y = \left(g - \frac{g}{2}\right)\frac{h}{g} = \frac{h}{2}$$

wegen $A''(x) = -\frac{2h}{g} < 0$ ist $A\left(\frac{g}{2}\right) = \frac{gh}{4}$ maximal.

Afg 4

Es ist zunächst zu prüfen, ob $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2)$ gilt. Dann nämlich ist f stetig an der Stelle $x=2$.

Es gilt

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (2x+1) = 5 = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (7-x) = 5$$

also f stetig.

Wir betrachten jetzt den Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ und nähern uns der Stelle 2 einmal von rechts und einmal von links an:

$$\lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{(7-x)-5}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2+} \left(-\frac{x-2}{x-2}\right) = -1 = f_+'(2)$$

andererseits:

$$\lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-} \frac{(2x+1)-5}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2-} \frac{2x-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2-} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2 = f_-'(2)$$

Man sieht: $f_+'(2) \neq f_-'(2)$.

Daher ist f an der Stelle $x=2$ <u>nicht</u> differenzierbar.

Für die Differenzierbarkeit müsste gelten $f_+'(2) = f'(2) = f_-'(2)$.

$\blacksquare$