Weitere Beispiele zu linearen Dglgleichungen:

6) $y' = \frac{y}{2x} - \sqrt{|x|} \cdot \sin x \quad , x \neq 0$

zunächst homogener Fall: $y' = \frac{y}{2x}$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x} + c_1 \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln|x| + c_1$

$\Rightarrow y = \pm e^{c_1} e^{\frac{1}{2}\ln|x|} = \pm e^{c_1} e^{\ln\sqrt{|x|}} = K \sqrt{|x|}$

also $y = \begin{cases} K\sqrt{x} & \text{für } x > 0 \\ K\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Variation der Konstanten: $y = K(x)\sqrt{|x|}$

i) Sei $x > 0$, dann $y = K(x)\sqrt{x}$

$\frac{y}{2x} - \sqrt{x} \cdot \sin x = y' = K'(x)\sqrt{x} + K(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= K'(x)\sqrt{x} + \frac{y}{2x} \quad \Big| - \frac{y}{2x}$

$K'(x)\sqrt{x} = -\sqrt{x} \cdot \sin x \Rightarrow K'(x) = -\sin x$

$\Rightarrow K(x) = -\int \sin x \, dx + c_1 = \cos x + c_1$

$\Rightarrow y = (\cos x + c_1)\sqrt{x} \quad \text{für } x > 0$

ii) Sei nun $x < 0$, dann $y = K(x)\sqrt{-x}$

$\frac{y}{2x} - \sqrt{x} \cdot \sin x = y' = K'(x)\sqrt{-x} - K(x)\frac{1}{2\sqrt{-x}} = K'(x)\sqrt{-x} + \frac{y}{2x}$

denn:

$\frac{y}{2x} = \frac{K(x)\cancel{\sqrt{-x}}}{-2\cancel{\sqrt{-x}} \cdot \sqrt{-x}} = -\frac{K(x)}{2\sqrt{-x}}$

beachte: $(\sqrt{-x})^2 = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x| = -x$

Somit:

$$K'(x)\sqrt{-x} = -\sqrt{-x}\cdot \sin x \quad | : \sqrt{-x}$$

$$K'(x) = -\sin x \Rightarrow K(x) = -\int \sin x\, dx + C_1'$$

$$= \cos x + C_1'$$

$$\Rightarrow \quad y = (\cos x + C_1')\sqrt{-x} \quad \text{für } x < 0$$

Insgesamt erhält man

$$y = (\cos x + C_1')\sqrt{|x|} \quad \text{für } x \neq 0, \; C_1' \in \mathbb{R}$$

<u>Kontrolle:</u>

$x > 0$: $$y' = -\sin x \cdot \sqrt{x} + (\cos x + C_1')\cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{y}{2x} - \sqrt{x}\cdot \sin x = \frac{(\cos x + C_1')\sqrt{x}}{2x} - \sqrt{x}\cdot \sin x \quad \checkmark$$

$x < 0$: $$y' = -\sin x \cdot \sqrt{-x} + (\cos x + C_1')\cdot \frac{-1}{2\sqrt{-x}}$$

$$\frac{y}{2x} - \sqrt{-x}\cdot \sin x = \frac{(\cos x + C_1')\sqrt{-x}}{2x} - \sqrt{-x}\cdot \sin x$$

$$= \frac{(\cos x + C_1')\sqrt{-x}}{-2(\sqrt{-x})^2} - \sqrt{-x}\cdot \sin x$$

---

7) $$y' = \frac{y}{3x} + e^x \cdot \sqrt[3]{x}, \quad x \neq 0$$

zunächst homogener Fall: $$y' = \frac{y}{3x}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{3x} + C_1 \iff \ln|y| = \frac{1}{3}\ln|x| + C_1'$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm e^{C_1} e^{\ln \sqrt[3]{|x|}} = K\sqrt[3]{|x|} = \begin{cases} K\sqrt[3]{x} & \text{für } x > 0 \\ -K\sqrt[3]{x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Variation der Konstanten: $y = K(x)\sqrt[3]{|x|}$

(22c)

i) Sei $x > 0$, dann $y = k(x)\sqrt[3]{x}$

$$\frac{y}{3x} + e^x\sqrt[3]{x} = y' = k'(x)\sqrt[3]{x} + k(x)\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= k'(x)\sqrt[3]{x} + \frac{y}{3x}$$

$$\Rightarrow \quad k'(x)\sqrt[3]{x} = e^x\sqrt[3]{x} \quad | : \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow k'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \quad k(x) = \int e^x dx + c_1 = e^x + c_1$$

$$\Rightarrow \quad y = (e^x + c_1)\sqrt[3]{x} \quad \text{für } x > 0$$

ii) Sei $x < 0$, dann $y = -k(x)\sqrt[3]{x}$

$$\frac{y}{3x} + e^x\sqrt[3]{x} = y' = -k'(x)\sqrt[3]{x} - k(x)\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= -k'(x)\sqrt[3]{x} + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad -k'(x)\sqrt[3]{x} = e^x\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow \quad k'(x) = -e^x \Rightarrow k(x) = -\int e^x dx - c_1 = -e^x - c_1$$

$$\Rightarrow \quad y = -(-e^x - c_1)\sqrt[3]{x} = (e^x + c_1)\sqrt[3]{x} \quad \text{für } x < 0$$

Insgesamt ist $y = (e^x + c_1)\sqrt[3]{x}$ für $x \neq 0$.