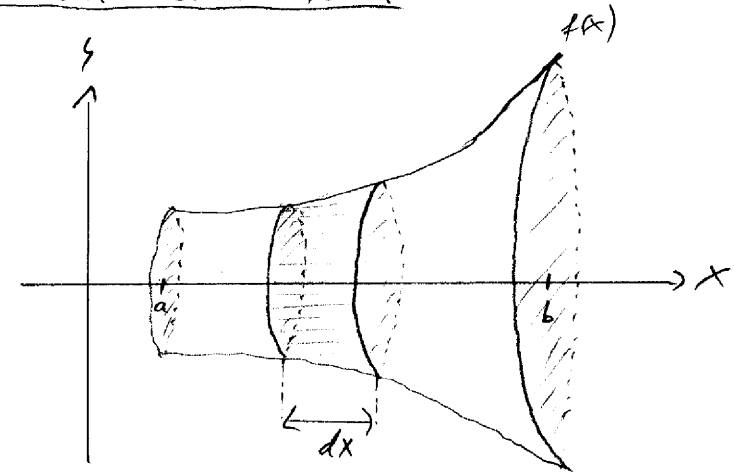
Anwendungen:

a) Volumen eines Rotationskörpers

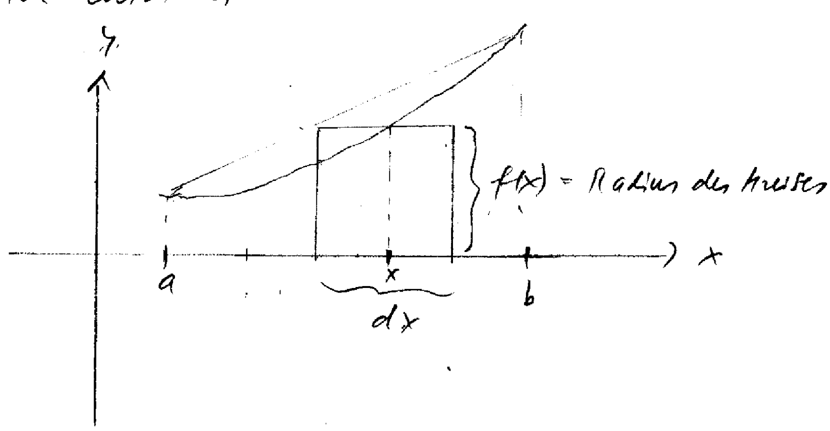
Entstehung durch Rotation einer ebenen Kurve um die x-Achse oder y-Achse.

1) Rotation um die x-Achse



Man zerlegt den durch Rotation des Graphen von f(x) um die x-Achse entstehenden Rotationskörper in Zylinderscheiben gleicher Dicke dx.

Man ersetzt diese Zylinderscheiben durch kreisförmige Zylinderscheiben, die durch Rotation des Rechtecks mit den Seitenlängen f(x) und dx um die x-Achse entsteht



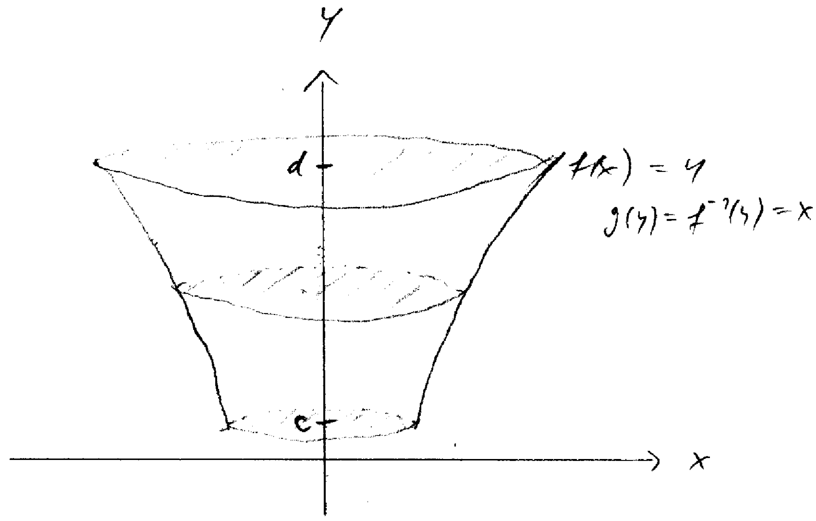
Sei dV_x das Volumen dieser Scheibe, dann gilt

$$dV_x = f^2(x)\pi\, dx$$

Summation aller Volumina der Zylinderscheiben und gleichzeitige Verfeinerung der Scheibendicke liefert das Rotationsvolumen

$$V = \int_{(V)} dV_x := \int_a^b f^2(x)\pi\, dx = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

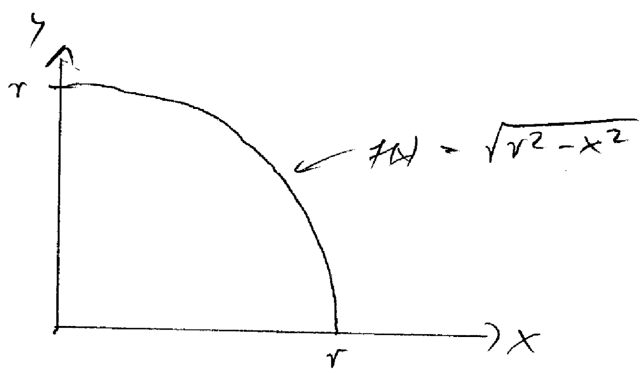
2) Rotation um die y-Achse



$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy$$

Bsp:

Durch Rotation des Kurvenstücks (Viertelkreises)



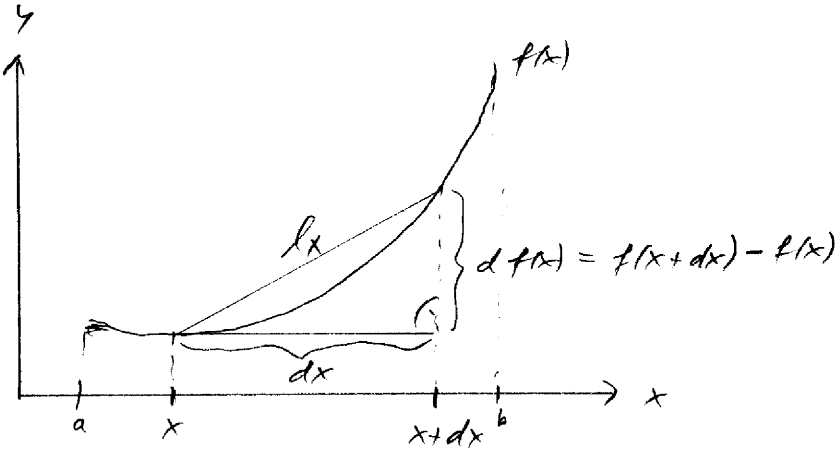
um die x-Achse entsteht eine Halbkugel. Für deren Volumen gilt

$$V_{Halbkugel} = \pi \int_0^r f^2(x)\,dx = \pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \pi \left(\int_0^r r^2\,dx - \int_0^r x^2\,dx \right)$$

$$= \pi \left([r^2 x]_0^r - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^r \right) = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{2}{3} r^3 \pi$$

Das Volumen der Vollkugel ist damit $V_{Kugel} = 2 V_{Halbk.} = \frac{4}{3} r^3 \pi$.

b) Bogenlänge einer ebenen Kurve



$$l_x^2 = (dx)^2 + (d f(x))^2$$

$$= (dx)^2 + \frac{(d f(x))^2}{(dx)^2} \cdot (dx)^2$$

$$= (dx)^2 \left(1 + \left(\frac{d f(x)}{dx}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad l_x = \sqrt{1 + \left(\frac{d f(x)}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

Summation mit gleichzeitigem $dx \to 0$ ergibt

$$\text{Länge}(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Bsp: Berechnung des Umfanges eines Kreises

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Wir berechnen die Länge von 0 bis r (Ergebnis muss $r\frac{\pi}{2}$ sein)
Zunächst gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$(f'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Dann folgt:

$$\text{Länge}(1) = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx \overset{x=r\sin t}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{r}{\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}}\, r\cos t\,dt$$

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt = r\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{r^2\cos t}{r\sqrt{1-\sin^2 t}}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{r^2\cos t}{r\cos t}\,dt$$

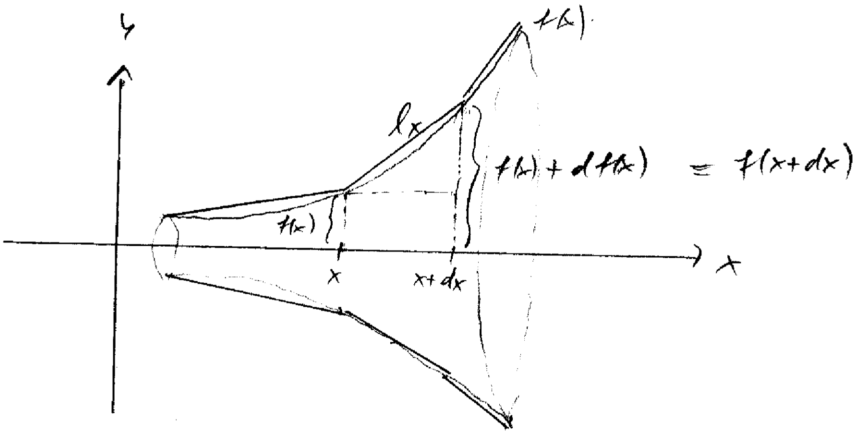
$$= \int_0^{\pi/2} r\,dt = [rt]_0^{\frac{\pi}{2}} = r\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Umfang}_{\text{Kreis}} = 4\,\text{Länge}(1) = 2r\pi$$

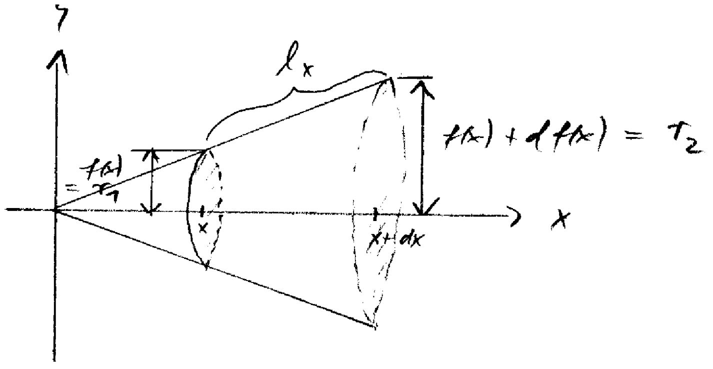
c) Rotationsfläche

Die Rotationsfläche ist die Oberfläche des durch Rotation einer ebenen Kurve um eine in der Kurvenebene liegende Achse entstehenden Rotationskörpers.

Wir approximieren den in Zeichnung a), 1) dargestellten Bogen durch Linienelemente



Jedes Linienelement l_x liefert durch Rotation um die x-Achse einen Kegelstumpf



Nach der Formel für die Mantelfläche eines Kegelstumpfes gilt

$$dM_x = \pi(r_1+r_2)\cdot l_x$$

$$= \pi\,(f(x) + (f(x)+df(x)))\cdot l_x$$

$$= \pi\,(2f(x) + df(x))\cdot l_x$$

Da für $dx \to 0$ gilt auch $df(x) \to 0$. Wir nehmen daher $df(x) = 0$ an und erhalten

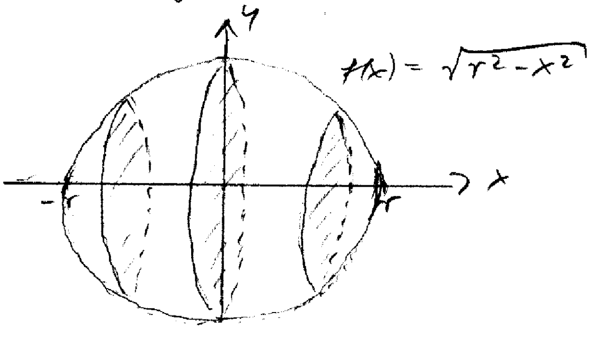
$$dM_x = 2\pi f(x)\, l_x$$
$$= 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

und sodann

$$M = \int_{(M)} dM_x := \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$
$$= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Bsp: Berechnung der Kugeloberfläche

Der durch Rotation des oberen Kreishalbkreises um die x-Achse entstehende Rotationskörper ist eine Kugel



Wir wissen bereits $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

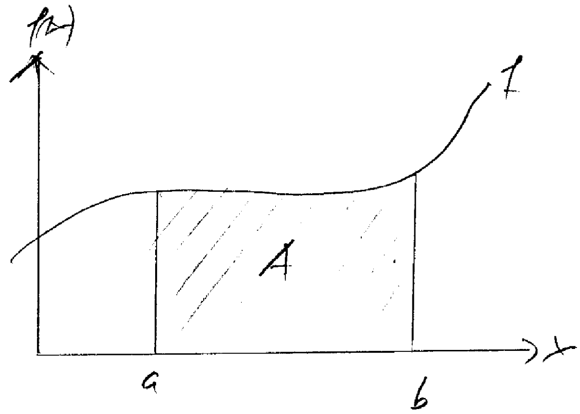
$$f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r$$

daraus die Oberfläche:

$$M = \int_{(M)} dM_x = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx = 2\pi \left[rx \right]_{-r}^{r}$$
$$= 2\pi (r^2 + r^2) = 2\pi\, 2r^2 = 4\pi r^2 .$$

Weitere Anwendungen der Integralrechnung:

Wichtige Anwendungen sind Flächenberechnungen



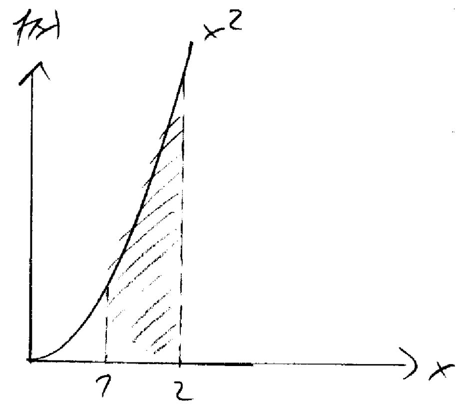
$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

mit F Stammfunktion von f.

Beispiele:

1) Man berechne die Fläche

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1) = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

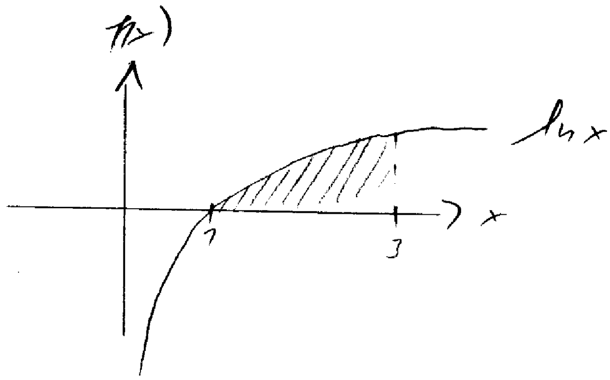


2)

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \left[x(\ln x - 1)\right]_1^2$$

$$= 2(\ln 2 - 1) - 1\cdot(\ln 1 - 1)$$

$$= 2(\ln 2 - 1) = -0{,}614$$

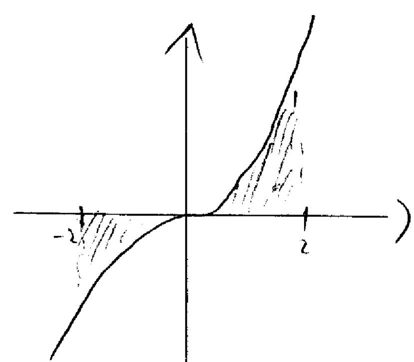


3)

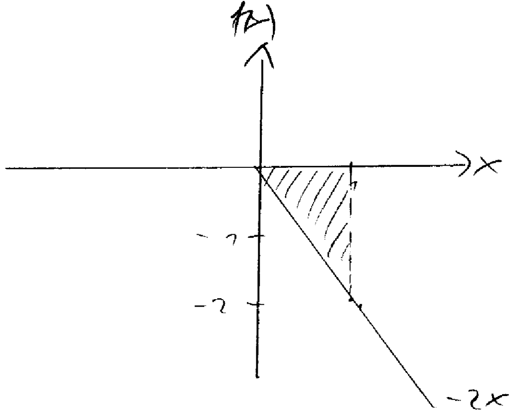
$$\int_{-2}^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(2^4 - (-2)^4\right)$$

$$= \frac{1}{4}(16 - 16) = 0$$

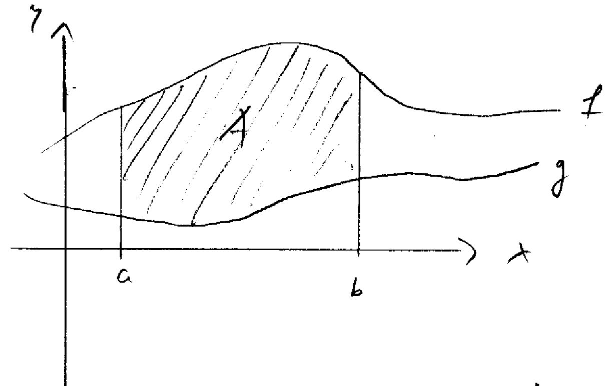


4)



$$\int_0^1 (-2x)\,dx = \left[-x^2\right]_0^1 = -1$$

Flächen, die durch mehrere Kurven begrenzt sind:

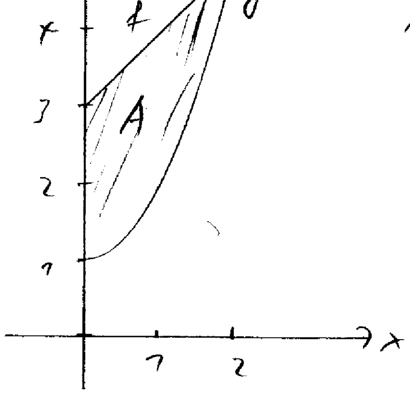


Es muss $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gelten!

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

Beispiele

1) Berechne die Fläche A, die von der y-Achse und den Kurven $f(x) = x+3$ und $g(x) = x^2+1$ in den Grenzen $0 \leq x \leq 2$ eingeschlossen wird.



$$A = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^2 g(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 (x+3-x^2-1)\,dx$$

$$= \int_0^2 (x-x^2+2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4 = \frac{10}{3}$$