1. Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

1.1. Funktionen in mehreren Veränderlichen

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ nicht leer. Wir betrachten zunächst Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

Dies sind Funktionen in 2 Veränderlichen (Variablen).

Beispiele:

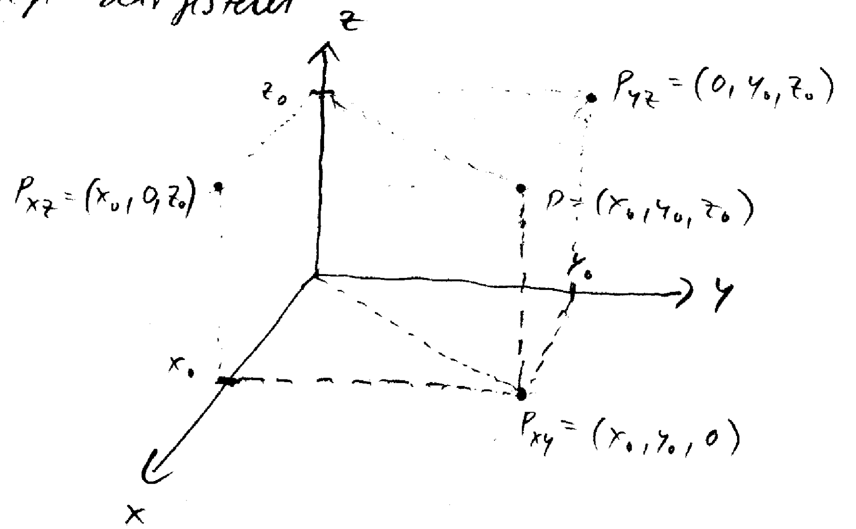
$$f(x,y) = x+y \quad , \quad f(x,y) = x^2 - y^2 \quad , \quad f(x,y) = xy + x^2 \quad \ldots$$

- Gelegentlich schreibt man auch $z = f(x,y)$, sog. explizite Darstellung im Gegensatz zur impliziten Darstellung $F(x,y,z) = 0$, z.B.

explizit	implizit
$z = xy + x^2$	$xy + x^2 - z = 0$

Graphische Darstellung von Funktionen in 2 Variablen:

- Punkte $P = (x_0, y_0, z_0)$ werden im dreidimensionalen Raum wie folgt dargestellt



$P_{xy} = (x_0, y_0, 0)$ liegt in der xy-Ebene

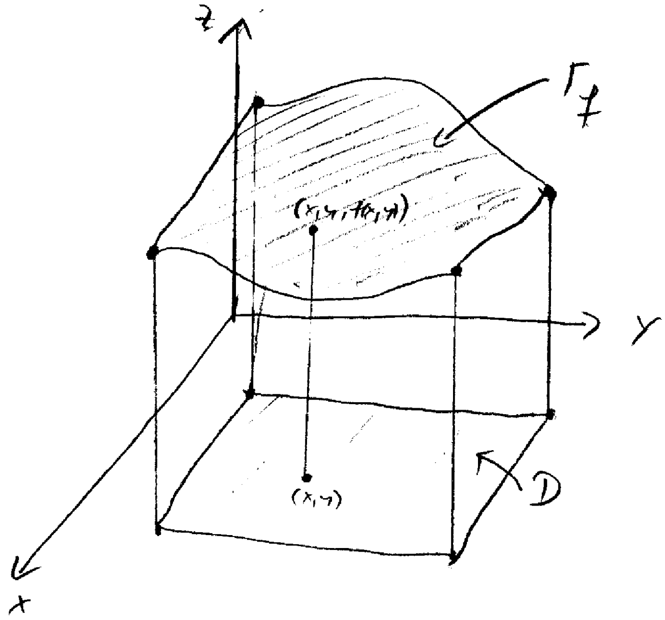
$P_{yz} = (0, y_0, z_0)$ liegt in der yz-Ebene

$P_{xz} = (x_0, 0, z_0)$ liegt in der xz-Ebene

Bei der Darstellung der Funktion $z = f(x,y)$ wird jedem Punkt (x,y) aus dem Definitionsbereich D, welcher in der xy-Ebene liegt ein Punkt $P = (x,y,z)$ im Raum $\mathbb{R}^3$ zugeordnet.
Der Graph der Funktion f, nämlich

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y) \text{ mit } (x,y) \in D\}$$

ist eine i.a. gekrümmte Fläche im Raum



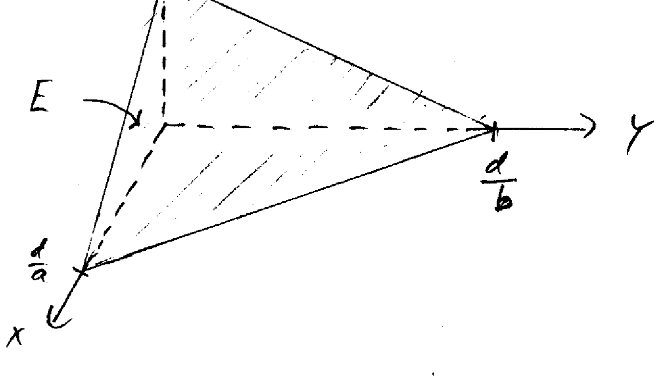
Die Fläche Γ_f liegt ober- oder unterhalb der xy-Ebene, je nachdem ob $f(x,y) > 0$ oder < 0 ist.
Ist $f = 0$, so gilt
$$\Gamma_f = \{(x,y,0) \mid (x,y) \in D\} \cong D$$

Wir wissen bereits, daß eine Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade (in der Ebene) ist, wenn es $a,b,c \in \mathbb{R}$ gibt mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ und

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$$

Diese Tatsache kann man auf den dreidimensionalen Raum übertragen. Die Gerade im $\mathbb{R}^2$ entspricht der Ebene im $\mathbb{R}^3$.
Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Ebene (im Raum), wenn es $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ gibt mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ oder $c \neq 0$ und

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}.$$

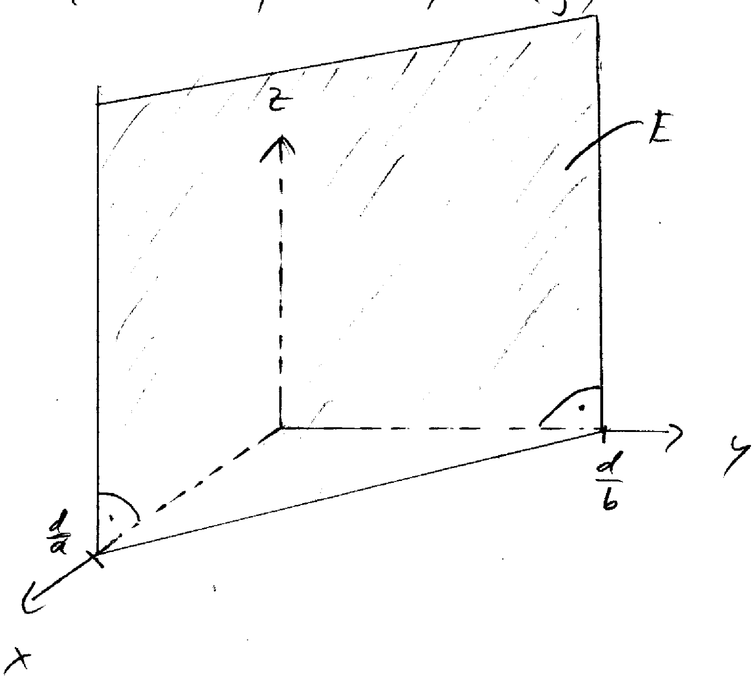


unter der Annahme, daß $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

*) siehe S. 4 unten

Unter der Annahme, daß $c = 0$, folgt

$$E = \{(x,y,z) \mid ax + by = d\},$$



Die Ebene steht senkrecht auf der xy-Ebene.

Die xy-Ebene wird im 90°-Winkel von der Ebene E geschnitten.

Die z-Achse wird von E nicht berührt.

Entsprechendes hat man für

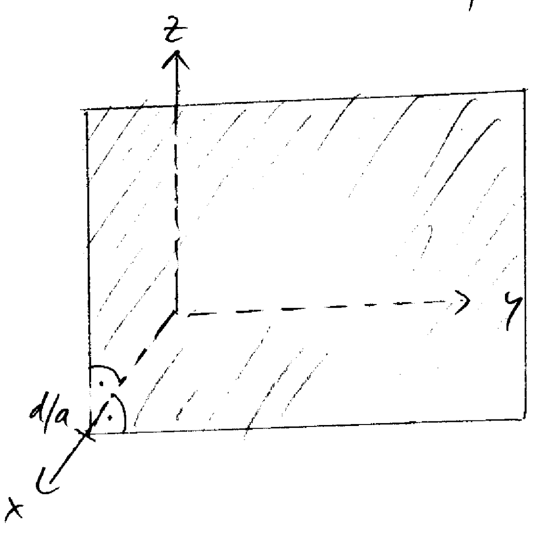
$a = 0 \Rightarrow$ E steht senkrecht auf der yz-Ebene

$b = 0 \Rightarrow$ E steht senkrecht auf der xz-Ebene

Ist $d = 0$, so gehen die Ebenen jeweils durch den Nullpunkt.

Ist $c = 0$ und $b = 0 \Rightarrow$ E steht senkrecht auf der xy-Ebene und ist parallel zur yz-Ebene

$$E = \{(x,y,z) \mid ax = d\} = \{(\tfrac{d}{a}, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$



Beispiel für eine Funktion in zwei Veränderlichen (Rotationsfläche):

Sei $g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, z.B. $g(r) = r^2$.

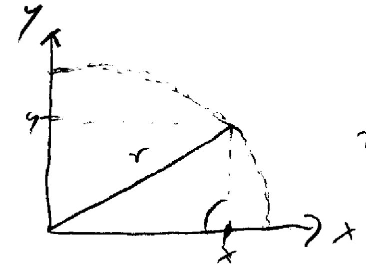
Definiere

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

dann ist der Graph

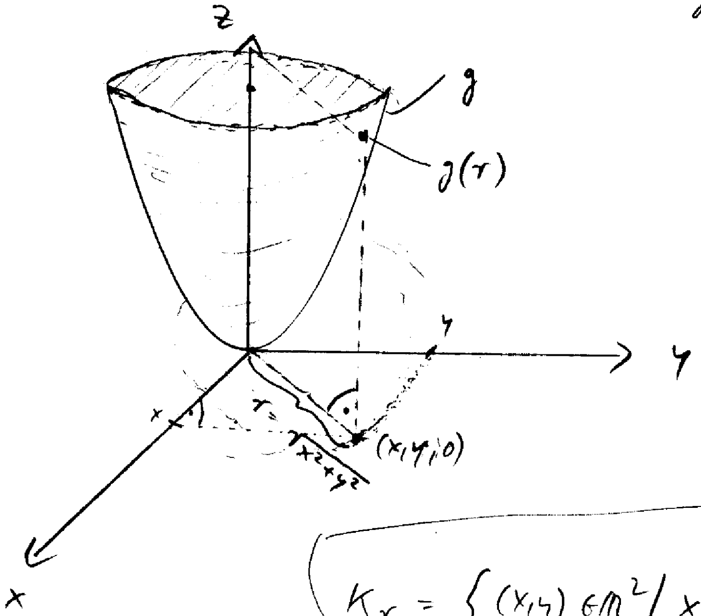
$$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

die Rotationsfläche (Mantelfläche) des durch Rotation des Graphen von g um die z-Achse entstehenden Rotationskörpers, denn



$r^2 = x^2+y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

alle (x,y), die auf der Kreislinie $r^2 = x^2+y^2$ liegen, liefern denselben Wert $f(x,y)$



z.B. ist der Graph von $f(x,y) = x^2+y^2$ ein Paraboloid

$g(r) = r^2$

$K_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r^2\}$ Kreislinie in der xy-Ebene mit Radius r und Mittelpunkt 0

*) Es ist $z = f(x,y) = ax+by+c$ eine lineare Funktion, deren Graph

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \mid z = ax+by+c,\ x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x,y,z) \mid ax+by-z = -c,\ x,y \in \mathbb{R}\}$$

eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist.

Funktionen in 2 Veränderlichen lassen sich auf Funktionen in 3 und mehr Veränderlichen verallgemeinern:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

eine Funktion in n Variablen. Sie ist reellwertig, da ihre Bilder in $\mathbb{R}$ liegen.

Bsp:

$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$

$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$

$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = |(x_1, \dots, x_n)|$

$y = f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b$

Der Graph der letzten Funktion

$$\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, y) \mid y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b,\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

ist eine Ebene im $\mathbb{R}^n$.

Es gibt auch vektorwertige Funktionen. Sei dazu $D \neq \emptyset$ ein beliebiger Definitionsbereich. Dann ist

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine vektorwertige Funktion. Für jedes $i = 1, \dots, m$ ist

$$p_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i$$

die sog. Projektion auf den i-ten Faktor. Damit erhält man für jede $i = 1, \dots, m$ die i-te Koordinatenfunktion

$$f_i := p_i \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto p_i(f(x))$$

von f, und es gilt $(f_1(x), \dots, f_m(x)) = f(x)$, denn $f(x)$ hat die Gestalt $f(x) = (y_1, \dots, y_m)$ mit $y_i \in \mathbb{R}$

$$f_i(x) = p_i(f(x)) = p_i(y_1, \dots, y_m) = y_i \quad \forall\, i = 1, \dots, m.$$

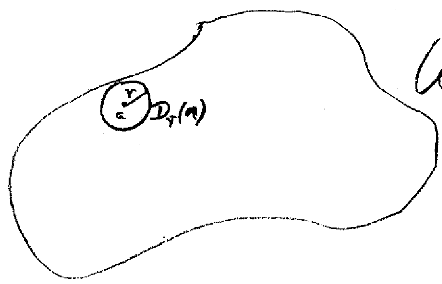
Man schreibt daher üblicherweise $f = (f_1, \dots, f_m)$.

1.2. Partielle Differentiation

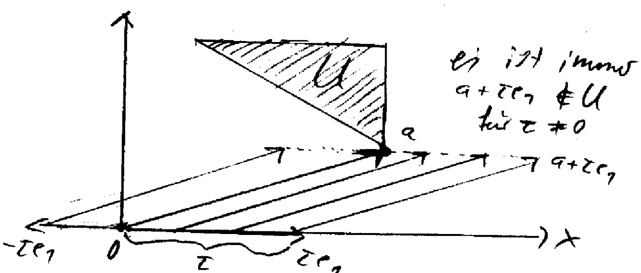
Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ heißt offen, wenn es zu jedem $a \in U$ ein $r > 0$ gibt mit

$$D_r(a) := \{ z \in \mathbb{R}^2 \mid |z-a| < r \} \subset U .$$

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.



Wäre U abgeschlossen:



es ist immer $a+\tau e_1 \notin U$ für $\tau \neq 0$

Fixiere einen Punkt $(x_0, y_0) \in U$ und definiere

$$V := \{ x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in U \} \text{ und } W := \{ y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in U \}$$

$\Rightarrow x_0 \in V$ und $y_0 \in W$

Dann sind $\boxed{g(x_0) = h(y_0)}$

$$g : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x, y_0) \qquad \text{und} \qquad h : W \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto f(x_0, y)$$

Funktionen in einer Veränderlichen. Ist g differenzierbar in x_0 und h differenzierbar in y_0 so existieren die Grenzwerte

$$g'(x_0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{g(x_0+\tau) - g(x_0)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x_0+\tau, y_0) - f(x_0, y_0)}{\tau}$$

$$h'(y_0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{h(y_0+\tau) - h(y_0)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\tau) - f(x_0, y_0)}{\tau}$$

und man sagt f ist im Punkt (x_0, y_0) partiell differenzierbar nach der 1. Variablen x_0, falls g in x_0 differenzierbar ist, und nach der 2. Variablen y_0, falls h in y_0 differenzierbar ist.

Man schreibt dann auch

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial x} = g'(x_0), \quad f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial y} = h'(y_0).$$

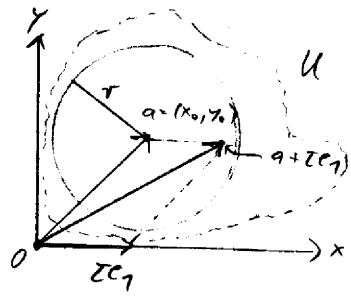
Ist f nach allen Variablen partiell diffbar in (x_0, y_0), so heißt f part. diffbar in (x_0, y_0).

Sind $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, so schreibt man auch gerne mit $a = (x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f((x_0,y_0) + \tau e_1) - f(x_0,y_0)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(a+\tau e_1) - f(a)}{\tau}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f((x_0,y_0) + \tau e_2) - f(x_0,y_0)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(a+\tau e_2) - f(a)}{\tau}$$

Es ist auch wichtig, daß für genügend kleines τ (d.h. genügend nahe bei 0) $a + \tau e_j \in U$ ist für $j = 1,2$. Dies ist der Fall, denn: U ist offen $\Rightarrow$ es gibt ein $r > 0$ mit $D_r(a) \subset U$. Wegen $\tau \to 0$ wird $|\tau| < r$, d.h. man wähle τ so klein, daß $|\tau| < r$ ist, dann gilt:

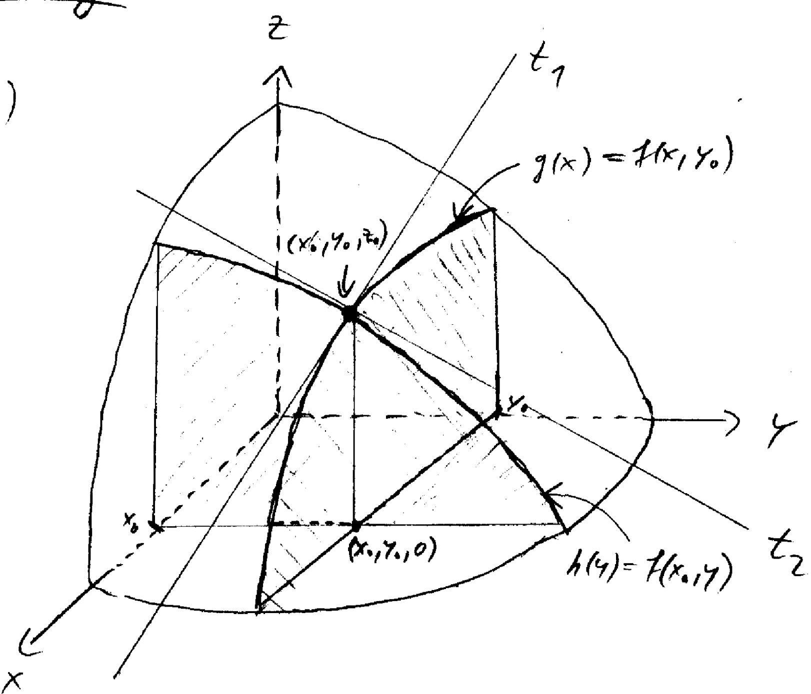


- $|a + \tau e_j - a| = |\tau e_j| = |\tau||e_j| = |\tau| < r$

$\Rightarrow a + \tau e_j \in D_r(a) \subset U$.

Geometrische Deutung:

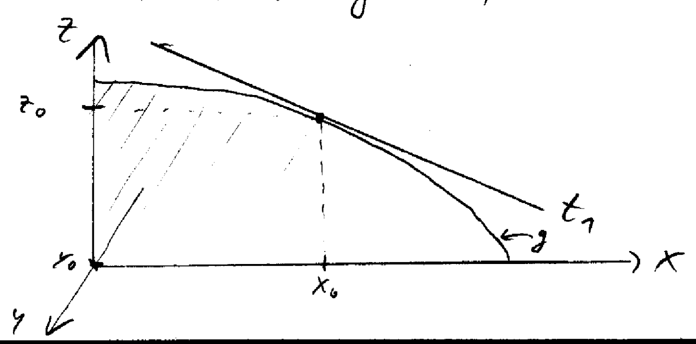
$z_0 = f(x_0,y_0)$



Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ sind die Steigungen der Tangenten an die Schnittkurven von g und h im Punkt (x_0,y_0,z_0).

Querschnitt:

in x-Richtung bei $y = y_0$



in y-Richtung bei $x = x_0$