Übungsblatt 7:

Aufgabe 1:
Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{falls} \quad x \leq 2 \\ \\ 7-x & \text{falls} \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{und } g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{falls} \quad x \leq 1 \\ \\ a+bx^2 & \text{falls} \quad x > 1 \end{cases}$$

Man zeige, dass f an der Stelle $x = 2$ zwar stetig, jedoch nicht differenzierbar ist.
Man bestimme die Koeffizienten a und b so, dass die Funktion g in $x = 1$ differenzierbar ist.
(Hinweis: Ist eine Funktion $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}$ auf $D\backslash\{a\}$ differenzierbar und in a stetig und gilt $\lim\limits_{x \to a-} \varphi'(x) = \lim\limits_{x \to a+} \varphi'(x)$, so ist φ in a differenzierbar.)

Aufgabe 2:
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \leq 1 \\ \\ ax^2+bx+c & \text{falls} \quad x > 1 \end{cases}$$

Man bestimme die Koeffizienten a, b und c so, dass die Funktion f in $x_1 = 1$ differenzierbar ist und außer in $x_0 = 0$ eine weitere Nullstelle in $x_2 = 2$ hat.

Aufgabe 3:
Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1 \qquad g(x) = e^{6x-x^2-9} \qquad h(x) = \frac{1}{16}x^4 - x^2$$

a) Man bestimmme Art und Lage der lokalen Extrema und Wendepunkte.

b) Man untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten.

c) Man bestimme für $f(x)$ die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 1$ und am Wendepunkt, und für $g(x)$ und $h(x)$ den Wertebereich.

Aufgabe 4:
Für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$$

bestimme man den maximalen Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extremwerte, Wendepunkte, Monotonie- und Krümmungsverhalten, Asymptoten. Man skizziere den Graphen und ermittle den Wertebereich. (Hinweis: Man bringe die Funktion zunächst auf die Form

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

mittels Hornerschema oder Polynomdivision.)

Aufgabe 5:
Bestimme die Gleichungen der Tangenten durch den Punkt $P = (5; 8)$ an den Funktionsgraphen $f(x) = x^2 - 4x + 7$.
(Hinweis: Stelle zunächst die Gleichung aller Geraden durch den Punkt P mit Hilfe der Punktsteigungsform $g_m(x) = m(x - x_0) + y_0$ auf und ermittle sodann in Abhängigkeit von m die Stellen x_m, an denen sich die Geraden $g_m(x)$ mit $f(x)$ schneiden. Löse sodann die Gleichung $f'(x_m) = m$ nach m auf.) Ergebnis: $t_1(x) = 10x - 42$ und $t_2(x) = 2x - 2$.

Aufgabe 6:
Es gibt genau zwei Geraden, die sowohl die Parabel $f(x) = x^2 + 4x + 1$ als auch die Parabel $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ berühren. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Geraden!
(Hinweis: Es gilt $g(-x) = -f(x)$. Berührt eine gemeinsame Tangente die Kurve f bei a, so wird g bei $-a$ berührt. Für die Bestimmung der Tangentengleichung $t(x) = mx + b$ betrachte man die Gleichungen $t(a) = f(a)$ und $t(-a) = g(-a)$ und ermittle daraus b. Berechne in Abhängigkeit von m die Stellen x_m, an denen sich f und t berühren und löse sodann die Gleichung $f'(x_m) = m$ nach m auf.)

Aufgabe 7:
In einem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten g und h sei ein Rechteck der Länge y (parallel zu h) und Breite x einbeschrieben. Wie sind x und y zu wählen, damit die Fläche des Rechtecks maximal wird?

Aufgabe 8:
Ein Leuchtturm L steht auf einer kleinen Insel 5 km nördlich eines Punktes A, der an einer geradlinig von Osten nach Westen verlaufenden Küste liegt. Ein Kabel soll von L aus zu einem 10 km östlich von A an der Küste gelegenen Punkt B verlegt werden. Dabei soll das Kabel zuerst im Wasser geradlinig zu einem Küstenpunkt C zwischen A und B gelegt und von dort aus entlang der Küste bis B weitergeführt werden.

a) Skizzieren Sie die geschilderte Aufgabenstellung!

b) Die Kabelverlegung kostet im Meer 5000 € je km und am Land 3000 € je km. Wie muß der Punkt C gewählt werden, damit die Gesamtkosten für die Kabelverlegung minimal werden?

Aufgabe 9:
Eine Blechdose mit dem festen Volumen V habe die Form eines Zylinders. Wie groß muß jeweils der Grundkreisradius r sein, damit die Oberfläche der oben a) offenen oder b) geschlossenen Dose mininal ist?

Aufgabe 10:
Ein kegelförmiger Trichter mit der vorgegebenen Mantellinie a soll so hergestellt werden, dass sein Volumen maximal ist. Für welche Höhe h des Kegels ist das Volumen V maximal? Berechnen Sie das maximale Volumen und den zugehörigen Grundkreisradius r!
(Hinweis: Stellen Sie das Volumen als Funktion in Abhängigkeit von h dar. Für das Volumen eines Kegels gilt $V = \frac{1}{3}r^2\pi h$, wie hängt r von h und a ab?)