Übungsblatt 3:

Aufgabe 1:
Gegeben sind die Funktionen

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \text{(Sinus hyperbolicus)}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \text{(Cosinus hyperbolicus)}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \text{(Tangens hyperbolicus)}$$

Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften ohne Benutzung der Differentialrechnung und beachten Sie dabei, dass e^x streng monoton wachsend ist:

i) sinh ist streng monton wachsend auf ganz $\mathbf{R}$.

ii) cosh ist streng monoton wachsend auf $[0;\infty[$ und streng monoton fallend auf $]-\infty;0]$. Für die erste Eigenschaft des cosh können Sie die Tatsache $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ und für die zweite Eigenschaft die Tatsache $\cosh(-x) = \cosh x$ für alle x benutzen.

iii) tanh ist streng monoton wachsend auf ganz $\mathbf{R}$. Hierbei können Sie die Tatsache $\tanh x = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$ für alle x benutzen.

Bestimmen Sie auf den streng monotonen Bereichen die Umkehrfunktionen obiger Funktionen. Dies sind die sog. **Areafunktionen**. Hierfür schreibt man $\text{Arsinh}x = \sinh^{-1} x$ usw.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie die folgenden Beziehungen für geeignete Winkelbereiche:

a) $1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$

b) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

c) $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{2}}$

d) $\cos(3\alpha) = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

Benutzen Sie in b) bis d) die Additionstheoreme von sin bzw. cos.