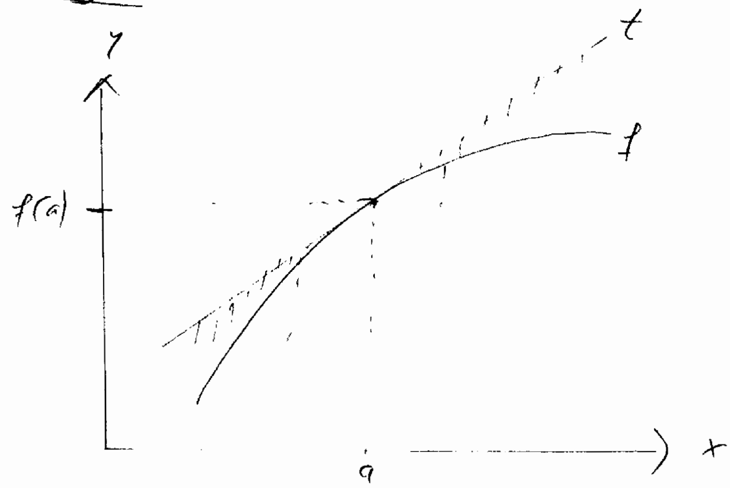
Weitere Anwendungen

a) Linearisierung



Aus der sog. Punktsteigungsform für eine Gerade, die durch den Punkt $P = (x_0, y_0)$ verläuft und die Steigung m besitzt, gilt

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

Daraus folgt für die Tangentengleichung

$$t(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Die nichtlineare Funktion $y = f(x)$ lässt sich in der Umgebung von a näherungsweise durch die dortige Tangente ersetzen. Diesen Vorgang nennt man Linearisierung einer Funktion

Bsp: $f(x) = \ln x$ in der Umgebung von 1

$$f'(x) = \frac{1}{x} = 1 \quad f'(1) = 1 \;;\; f(1) = 0$$

$$t(x) = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1$$

d.h. $\ln x \approx x - 1$ in der Nähe von 1

	0,8	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,15
$x-1$	−0,2	−0,1	−0,05	0	0,05	0,1	0,15
$\ln x$	−0,2231	−0,1054	−0,0513	0	0,0488	0,0953	0,1398

(11) Taylorsche Reihe.

Ersetzt man in der Mac Laurin'schen Reihe das x durch $x-a$ mit $a \in \mathbb{R}$, so erhält man die allgemeine Taylorsche Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

von $f(x)$ in einer gewissen Umgebung von a, d.h. für alle x mit $|x-a| < r$, wobei r = Konvergenzradius. Dann hat die Funktion $g(x) = f(x+a)$ die Darstellung

$$g(x) = f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für alle x mit $|x| = |(x+a)-a| < r$. Daraus folgt $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+a) \Rightarrow g^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)$ und wir wissen

$$f(x) = g(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Die Reihe

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

heißt Taylorsche Reihe von $f(x)$ im Entwicklungspunkt a (oder auch Entwicklungszentrum.)

Beispiel: $f(x) = \ln x$ mit $a = 1$

Man möchte

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \quad ; \quad f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(1)}{1!} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{f''(1)}{2!} = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{f'''(1)}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = -\frac{6}{6\cdot 4} = -\frac{1}{4}$$

Man sieht

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad ; \quad a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n} & \text{für } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

Konvergenzradius

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \quad ; \text{ d.h. } r = 1$$

konvergiert für $|x-1| < 1$, d.h. $-1 \leq x-1 \leq 1$

also $0 < x \leq 2$

insbesondere ist

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Bsp: $\ln 364 = \ln(2^8 \cdot 1{,}421875) = 8 \cdot \ln 2 + \ln(1{,}421875)$

$\approx 5{,}897$

Hat man für $f(x)$ eine Darstellung der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{für } |x-a| < r$$

mit $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gefunden, so bricht man die Reihe irgendwo ab und erhält

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n (x-a)^n + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (x-a)^n}_{= R_{m+1}(x)}$$

für ein gewisses $m \geq 1$.

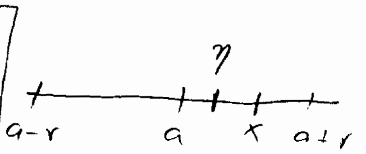
Dann heißt

$$f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n (x-a)^n$$

<u>Taylorpolynom m-ten Grades von f</u> und $R_{m+1}(x)$ das sog. <u>Restglied</u>.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < r$ gibt es ein η zwischen a und x, so dass

$$\boxed{R_{m+1}(x) = \frac{f^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!} (x-a)^{m+1}}$$



Und hat man folgendes Kriterium:

Ist $f(x)$ in einer gewissen Umgebung von a beliebig oft differenzierbar und ist für jedes x mit $|x-a| < r$

$$\lim_{m \to \infty} R_{m+1}(x) = 0$$

so lässt sich f in eine Taylor'sche Reihe entwickeln, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \text{für } |x-a| < r$$

Beispiele.

1) $f(x) = e^x$ ist beliebig oft diffbar und

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!} \cdot x^n = e^{\eta} \frac{x^n}{n!} \to 0 \text{ bei } n \to \infty$$

somit $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

2) $f(x) = \sin x$

$$|R_{m+1}(x)| = \frac{|f^{(m+1)}(\eta)|}{(m+1)!} |x|^{m+1} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \to 0 \text{ bei } m \to \infty$$

also $$\lim_{m \to \infty} R_{m+1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$