Lösungen Blatt 7:

— Entwurf —

Afg 3

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 6x \quad ; \; f''(x) = 6x+6 \; ; \; f'''(x) = 6$

a) $f'(x) = 0 \iff x(3x+6) = 0$
$\iff x_1 = 0 \,,\; x_2 = -2$

f hat bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ kritische Stellen

$\begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \implies \text{lokales Min bei } x = 0 \\ f''(-2) = -6 < 0 \implies \text{" Max " } x = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{lok. Max von } f = f(-2) = -8+12+1 = 5 \\ \text{" Min " " } = f(0) = 1 \end{cases}$

$f''(x) = 0 \iff x = -1 \quad ; \; f'''(-1) \neq 0$

$\implies$ f hat bei $x = -1$ Wendepunkt ; $f(-1) = 3$

b) $f'(x) = x(3x+6) = \begin{cases} \geq 0 \text{ falls } x \geq 0 \text{ oder } x \leq -2 \\ \leq 0 \text{ falls } -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$

$\implies \begin{cases} f \text{ monoton wachsend auf }]-\infty; -2] \cup [0; \infty[\\ \text{" " fallend " } [-2; 0] \end{cases}$

$f''(x) = 6(x+1) = \begin{cases} \geq 0 \text{ falls } x \geq -1 \\ \leq 0 \text{ falls } x \leq -1 \end{cases}$

$\implies \begin{cases} f \text{ linksgekrümmt auf } [-1; \infty[\\ \text{" rechts -"- " }]-\infty; -1] \end{cases}$

c) Sei t_1 die Tangente an den Punkt $P_1 = (1/5)$
" t_2 " " " " Wendepunkt $P_2 = (-1;3)$

zunächst $t_1(x) = mx + b$

$$
\begin{array}{ll}
\text{I.} & m + b = t_1(1) = f(1) = 5 \\
\text{II} & m = t_1'(1) = f'(1) = 3 + 6 = 9 \\
\hline
 & 9 + b = 5 \Rightarrow b = -4
\end{array}
$$

$\Rightarrow t_1(x) = 9x - 4$

jetzt $t_2(x) = mx + b$

$$
\begin{array}{ll}
\text{I.} & -m + b = t_2(-1) = f(-1) = 3 \\
\text{II.} & m = t_2'(-1) = f'(-1) = -3 \\
\hline
 & 3 + b = 3 \Rightarrow b = 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow t_2(x) = -3x$

---

2) $g(x) = e^{6x - x^2 - 9}$

$g'(x) = (6 - 2x)e^{6x - x^2 - 9}$

$g''(x) = -2e^{6x - x^2 - 9} + (6 - 2x)^2 e^{6x - x^2 - 9}$

$= \left((6 - 2x)^2 - 2\right)e^{6x - x^2 - 9}$

a) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$\Rightarrow$ g hat bei $x = 3$ kritische Stelle

$g''(3) = -2e^0 = -2 < 0$

$\Rightarrow$ bei $x = 3$ ein lok. Max.

$$g''(x) = 0 \iff (6-2x)^2 = 2$$
$$\iff x_{1/2} = \frac{1}{2}(6 \pm \sqrt{2}) = 3 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d.h. $g''(x) = 4\left(x - (3+\frac{1}{\sqrt{2}})\right)\left(x - (3-\frac{1}{\sqrt{2}})\right) e^{6x - x^2 - 9}$

Daraus folgt:

b) $g''(x)$ ist $\begin{cases} \geq 0 & \text{falls } x \geq 3+\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } x \leq 3-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \leq 0 & \text{falls } 3-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 3+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

d.h. g linksgekrümmt auf $]-\infty; 3-\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [3+\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty[$
g rechts- " " $[3-\frac{1}{\sqrt{2}}; 3+\frac{1}{\sqrt{2}}]$

Somit bei $x_1 = 3+\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_2 = 3-\frac{1}{\sqrt{2}}$ Wendepunkte

$g'(x)$ ist $\begin{cases} \geq 0 & \text{falls } x \leq 3 \\ \leq 0 & \text{falls } x \geq 3 \end{cases}$

d.h. $\left.\begin{array}{l} g \text{ monoton wachsend auf }]-\infty; 3] \\ g \text{ " fallend " } [3; \infty[\end{array}\right\} \Rightarrow$ bei $x=3$ auch globales Max

$g(3) = e^0 = 1$

c) Ferner gilt

$g(x) = e^{-(x-3)^2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$

Wertebereich $W =]0; 1]$

3) $h(x) = \frac{1}{16}x^4 - x^2$

$h'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x = \frac{x}{4}(x^2-8).$

$h''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2$; $h'''(x) = \frac{3}{2}x$

a) $h'(x) = 0 \iff \frac{x}{4}(x^2-8) = 0$

$\iff x(x^2-8) = 0$

$\iff x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{8}$; $x_3 = -\sqrt{8}$

$h''(0) = -2 < 0 \implies$ lok. Max bei $x = 0$

$h''(\pm\sqrt{8}) = \frac{3}{4}\cdot 8 - 2 = 4 > 0 \implies$ lok. Min " $x = \pm\sqrt{8}$

$h(0) = 0$; $h(\pm\sqrt{8}) = \frac{64}{16} - 8 = -4$

$h''(x) = 0 \iff \frac{3}{4}x^2 - 2 = 0 \iff 3x^2 = 8$

$\iff x^2 = \frac{8}{3} \iff x_1 = \sqrt{\frac{8}{3}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{8}{3}}$

wegen $h'''\left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \pm\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}} \neq 0$

hat h bei $x_1 = \sqrt{\frac{8}{3}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{8}{3}}$ Wendepunkte

$h\left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \frac{1}{16}\cdot\frac{64}{9} - \frac{8}{3} = \frac{4}{9} - \frac{24}{9} = -\frac{20}{9}$

b) $h'(x) \geq 0 \iff x(x^2-8) \geq 0$

$\iff \begin{cases} x \geq 0 \text{ und } x^2 \geq 8 \iff x \geq \sqrt{8} \text{ oder} \\ x \leq 0 \text{ und } x^2 \leq 8 \iff -\sqrt{8} \leq x \leq 0 \end{cases}$

$h'(x) \leq 0 \iff x(x^2-8) \leq 0$

$\iff \begin{cases} x \geq 0 \text{ und } x^2 \leq 8 \iff 0 \leq x \leq \sqrt{8} \\ x \leq 0 \text{ und } x^2 \geq 8 \iff x \leq -\sqrt{8} \end{cases}$

d.h.

$$\begin{cases} h \text{ monoton wachsend auf } [-\sqrt{8}; 0] \cup [\sqrt{8}; \infty[\\ h \quad \text{"} \quad \text{fallend} \quad \text{"} \quad]-\infty; -\sqrt{8}] \cup [0; \sqrt{8}] \end{cases}$$

$$h''(x) \text{ ist } \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } x \geq \sqrt{\tfrac{8}{3}} \text{ oder } x \leq -\sqrt{\tfrac{8}{3}} \\ \leq 0 & \text{falls } -\sqrt{\tfrac{8}{3}} \leq x \leq \sqrt{\tfrac{8}{3}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ h linksgekrümmt auf $]-\infty; -\sqrt{\tfrac{8}{3}}] \cup [\sqrt{\tfrac{8}{3}}; \infty[$
h rechts " " $[-\sqrt{\tfrac{8}{3}}; \sqrt{\tfrac{8}{3}}]$

c) Wertebereich $W = [-4; \infty[$

Afg 4 $\qquad f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+1}$

Mit Horner-Schema

	1	-2	1
-1	0	-1	3
	1	-3	4

folgt:

$$f(x) = x - 3 + \frac{4}{x+1}$$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Nullstellen: $f(x) = 0 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$
$\iff (x-1)^2 = 0$
$\iff x = 1$

Ableitungen und Extrema

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} \; ; \; f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3} \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{4}{(x+1)^2} = 1$$

$$\iff (x+1)^2 = 4$$

$$\iff x_1 = 2-1 = 1 \quad ; \ f(1) = 0$$

$$x_2 = -2-1 = -3 \quad ; \ f(-3) = -8$$

$$\begin{cases} f''(1) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow \text{lok. Min bei } x = 1 \\ f''(-3) = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \Rightarrow \text{lok. Max bei } x = -3 \end{cases}$$

Wegen $f''(x) \neq 0$ gibt es keine Wendepunkte!

<u>Monotonieverhalten:</u>

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} = \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } x \geq 1 \text{ oder } x \leq -3 \\ \leq 0 & \text{falls } -3 \leq x \leq 1 \text{ und } x \neq -1 \end{cases}$$

Somit

$$\begin{cases} f \text{ monoton wachsend auf }]-\infty; -3] \cup [1; \infty[\\ f \quad \text{"} \quad \text{fallend} \quad \text{"} \quad [-3; -1[\cup]-1; 1] \end{cases}$$

<u>Krümmungsverhalten</u>

$$f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3} = \begin{cases} > 0 & \text{falls } x > -1 \\ < 0 & \text{falls } x < -1 \end{cases}$$

d.h.

f linksgekrümmt auf $]-1; \infty[$

f rechts – " – " $]-\infty; -1[$

Asymptoten:

vertikale A. bei $x = -1$ (Pol)

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = -4 + \frac{4}{0+} = -4 + \infty = \infty$$

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = -4 + \frac{4}{0-} = -4 - \infty = -\infty$$

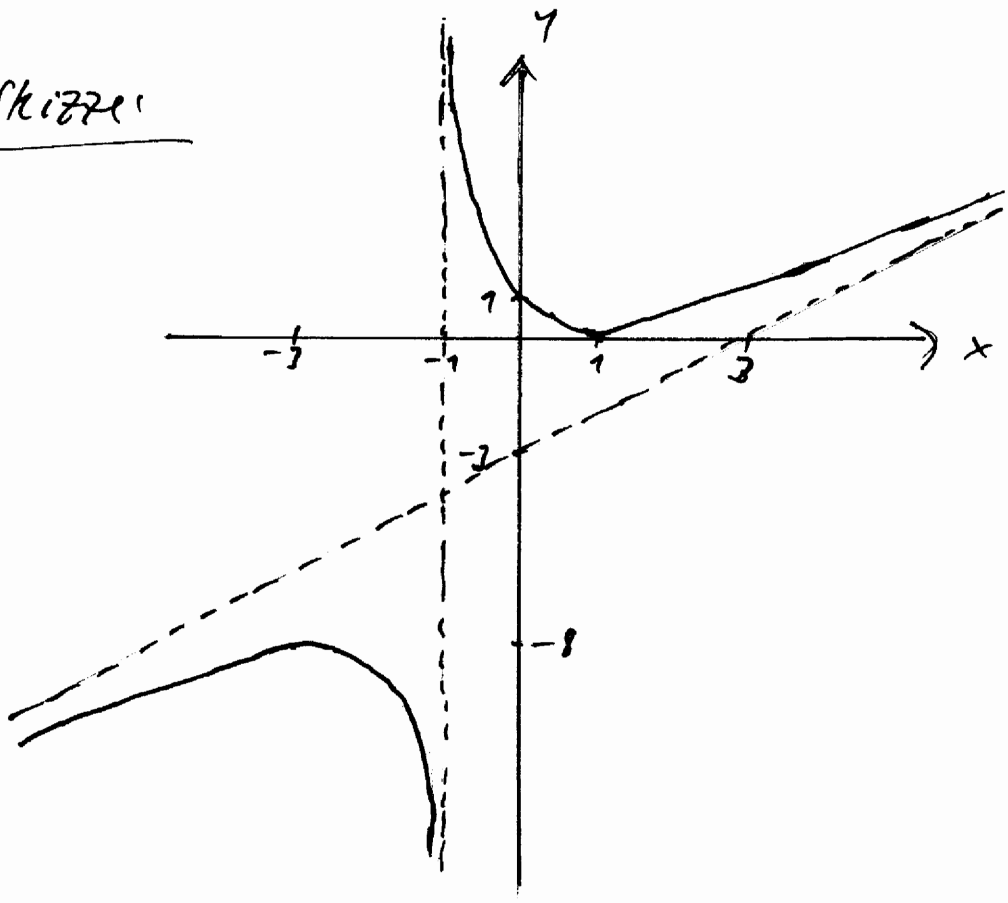
schiefe A. $a(x) = x - 3$

wegen $|f(x) - a(x)| = \frac{4}{x+1} \to 0$ für $x \to \infty$

Wertebereich: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$W =]-\infty; -8] \cup [0; \infty[= \mathbb{R} \setminus]-8; 0[$$

Skizze:



Afg 5

i) Gleichung aller Geraden durch den Punkt $P = (5;8)$:

$$g_m(x) = m(x-5)+8 \quad \text{(sog. Punktsteigungsform)}$$

ii) Schnittpunkte von $f(x)$ mit $g_m(x)$:

$$f(x) = g_m(x)$$
$$x^2-4x+7 = m(x-5)+8$$
$$x^2-4x+7 = mx-5m+8$$
$$x^2-(m+4)x+5m-1 = 0$$
$$x_m = \frac{m+4 \pm \sqrt{(m+4)^2-4(5m-1)}}{2}$$

iii) Ermittlung von m mit $f'(x_m) = m$:

$$f'(x) = 2x-4 \implies f'(x_m) = m \pm \sqrt{(m+4)^2-4(5m-1)}$$

$$f'(x_m) = m \iff 0 = (m+4)^2-4(5m-1) = m^2+8m+16-20m+4$$
$$\iff m^2-12m+20 = 0$$
$$\iff m_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{2} = \frac{12\pm 8}{2} = 6 \pm 4$$
$$\iff m_1 = 10\ ;\ m_2 = 2$$

Daraus folgt für die Tangenten:

$$\begin{cases} t_1(x) = g_{m_1}(x) = 10(x-5)+8 = 10x-42 \\ t_2(x) = g_{m_2}(x) = 2(x-5)+8 = 2x-2 \end{cases}$$

mit den Berührungspunkten:

$$\begin{cases} x_{m_1} = \frac{m_1+4}{2} = \frac{10+4}{2} = 7 \implies P_1 = (7;28) \\ x_{m_2} = \frac{m_2+4}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \implies P_2 = (3;4) \end{cases}$$

Afg 6

$f(x) = x^2+4x+1$ und $g(x) = -x^2+4x-1$

Es gilt ersichtlich $g(-x) = -f(x)$ für alle x.

$f'(x) = 2x+4$; $g'(x) = -2x+4$

Sei $t(x) = mx+b$ eine gemeinsame Tangente, die f und g berührt.

t berühre f bei a $\longrightarrow$ für welches x gilt $f'(a) = g'(x)$

$$\Longleftrightarrow \quad 2a+4 = -2x+4$$
$$\Longleftrightarrow \quad x = -a$$

d.h. dann berührt t die Kurve g bei $-a$.

$$\text{I.} \quad ma+b = t(a) = f(a)$$
$$\text{II} \quad -ma+b = t(-a) = g(-a) = -f(a)$$

$$\text{I+II:} \qquad 2b = 0 \implies b = 0$$

Somit $t(x) = mx$ gemeinsame Tangente!

Schnittpunkte von t mit f:

$$x^2+4x+1 = mx \iff x^2+(4-m)x+1 = 0$$
$$\iff x_m = \frac{m-4 \pm \sqrt{(m-4)^2-4}}{2}$$

$$\implies f'(x_m) = m \pm \sqrt{(m-4)^2-4}$$

$$f'(x_m) = m \iff (m-4)^2-4 = 0 \iff (m-4)^2 = 4$$
$$\iff m_1 = 2+4 = 6 \;;\; m_2 = -2+4 = 2$$

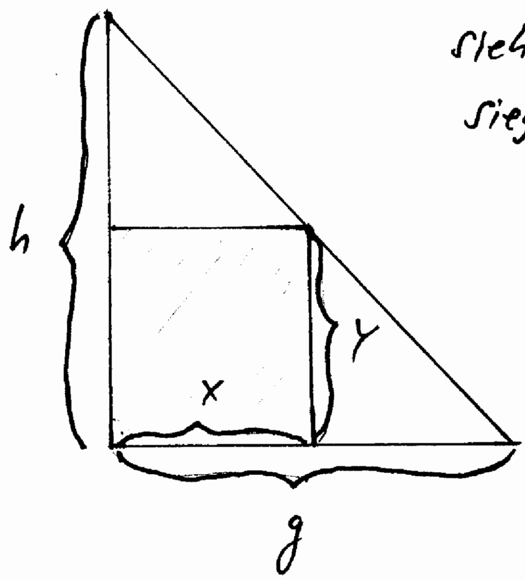
Somit $t_1(x) = 6x$ und $t_2(x) = 2x$

mit den Berührungspunkten:

$$\begin{cases} x_{m_1} = \frac{m_1-4}{2} = \frac{6-4}{2} = 1 & \implies P_1 = (1;6) \text{ von } t_1 \text{ mit } f \\ x_{m_2} = \frac{m_2-4}{2} = \frac{2-4}{2} = -1 & \implies P_2 = (-1;-2) \text{ von } t_2 \text{ mit } f \end{cases}$$

Schnittpunkte mit $g(x)$ führen zu den selben Tangenten!

Afg 7



siehe auch auf meiner Seite:
siegdiet.de → Mathematik
→ Geom. Spielereien
→ Flächenmaximierung

Nach Strahlensatz gilt $\frac{h}{g} = \frac{y}{g-x} \Rightarrow y = (g-x)\cdot\frac{h}{g}$

Zu maximieren ist die Fläche

$$A(x) = xy = x(g-x)\cdot\frac{h}{g} = xh - x^2\cdot\frac{h}{g}$$

wobei $0 < x < g$.

$$A'(x) = h - 2x\cdot\frac{h}{g} \quad ; \quad A''(x) = -\frac{2h}{g} < 0$$

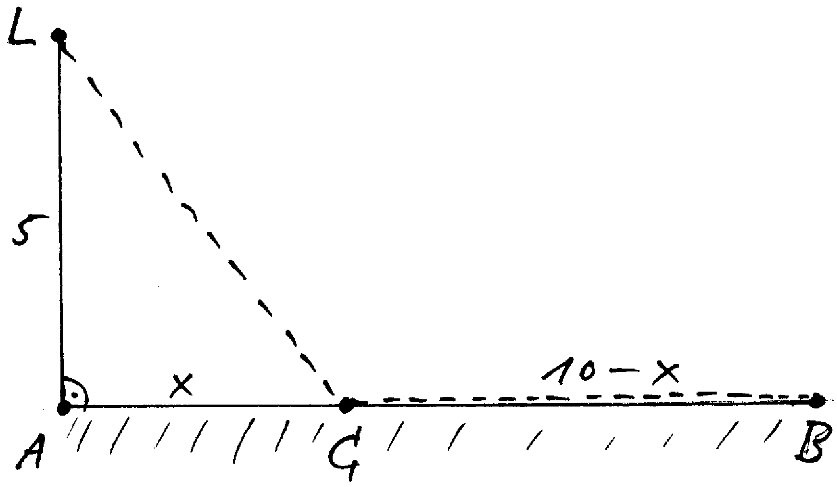
$$A'(x) = 0 \iff h - 2x\cdot\frac{h}{g} = 0$$
$$\iff x = \frac{g}{2}$$

$$\Rightarrow y = \left(g - \frac{g}{2}\right)\cdot\frac{h}{g} = \frac{h}{2}$$

Die Fläche $A(x)$ ist für $x = \frac{g}{2}$ maximal und es gilt

$$\max A(x) = A\left(\frac{g}{2}\right) = \frac{gh}{4}.$$

Afg 8



Für die Gesamtkosten gilt für $0 \leq x \leq 10$

$$K(x) = 5000\sqrt{x^2+25} + 3000(10-x)$$

$$K'(x) = 2500 \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+25}} - 3000 = \frac{5000x}{\sqrt{x^2+25}} - 3000$$

$$K''(x) = \frac{5000\sqrt{x^2+25} - \frac{1}{2} \cdot 5000x \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+25}}}{x^2+25}$$

$$= \frac{5000(x^2+25-x^2)}{(x^2+25)\sqrt{x^2+25}} = \frac{5000 \cdot 25}{(x^2+25)\sqrt{x^2+25}} > 0$$

Nun gilt:

$$K'(x) = 0 \iff 3000\sqrt{x^2+25} = 5000x$$
$$\iff 3\sqrt{x^2+25} = 5x$$
$$\iff 9x^2 + 225 = 25x^2$$
$$\iff 16x^2 = 225 \iff x = 3{,}75 \text{ km}$$

Somit hat man bei $x = 3{,}75$ ein lokales Minimum.

$K(3{,}75) = 50.000€$; $K(0) = 55.000€$; $K(10) \approx 55.902€$

d.h. bei $x = 3{,}75$ km hat man ein globales Minimum, weil die geringsten Kosten entstehen.