Goniometrische Gleichungen:

Für die nachfolgenden Beispiele goniometrischer Gleichungen sind folgende Symmetriegleichungen für die trigonometrischen Funktionen zu beachten (alle Winkel sind im Bogenmaß angegeben):

a) $\sin(\pi - x) = \sin x$ und $\cos(\pi - x) = -\cos x$

b) $\sin(x + \pi) = -\sin x$ und $\cos(x + \pi) = -\cos x$

c) $\tan(x + \pi) = \tan x$ und $\cos(2\pi - x) = \cos x$

d) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ und $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

1. Gleichungen mit einer trigonometrischen Funktion

Zunächst die einfachen Grundgleichungen für sin, cos und tan:

1) $\sin x = 0,6$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$

$x_1 = \sin^{-1} 0,6 = 0,6435$ gem. Taschenrechner
$x_2 = \pi - x_1 = 2,4981$ gem. sin-Gleichung a)

2) $\sin x = -0,6$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$

$x' = \sin^{-1}(-0,6) = -0,6435$ gem. Taschenrechner, jedoch $x' \notin [0; 2\pi]$

daher gilt nach sin-Gleichung a) und d) der Reihe nach

$x_1 = \pi - x' = \pi - (-0,6435) = \pi + 0,6435 = 3,7851$
$x_2 = x' + 2\pi = 2\pi - 0,6435 = 5,6397$

3) $\cos x = 0,6$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$

$x_1 = \cos^{-1} 0,6 = 0,9273$ gem. Taschenrechner
$x_2 = 2\pi - x_1 = 5,3559$ gem. cos-Gleichung c)

4) $\cos x = -0,6$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$

$x_1 = \cos^{-1}(-0,6) = 2,2143$ gem. Taschenrechner
$x_2 = 2\pi - x_1 = 4,0689$ gem. cos-Gleichung c)

5) $\tan x = 0,6$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$

$x_1 = \tan^{-1} 0,6 = 0,5404$ gem. Taschenrechner
$x_2 = x_1 + \pi = 3,6820$ gem. tan-Gleichung c)

6) $\tan x = -0,6$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$

$x' = \tan^{-1}(-0,6) = -0,5404$ gem. Taschenrechner, jedoch $x' \notin [0; 2\pi]$

daher gilt jeweils nach tan-Gleichung c)

$x_1 = x' + \pi = \pi - 0,5404 = 2,6012$
$x_2 = x_1 + \pi = 5,7428$

Setzt man in den Beispielen 1) bis 6) jeweils $\mathcal{G} = \mathbf{R}$, ersetzt also die Grundmenge jeweils durch die Menge der reellen Zahlen, so erhält man alle (unendlich vielen) Lösungen, nämlich jeweils

für die Beispiele 1) bis 4)

$x_{1k} = x_1 + 2k\pi$ und $x_{2k} = x_2 + 2k\pi$ wegen der Gleichungen d)

und für die Beispiele 5) und 6)

$x_k = x_1 + k\pi$ wegen der tan-Gleichung c)

mit $k \in \mathbf{Z}$, d.h. $k = 0, 1, 2, 3, ...$ sowie $k = -1, -2, -3, ...$ Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ hat dann z. B. im Beispiel 5) die Gestalt $\mathcal{L} = \{0,5404 + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$.

Weitere Beispiele, die auf den obigen elementaren Beispielen 1) bis 6) aufbauen (siehe Lehrbrief M XI, Goniometrie):

2.2) $2\cos x + 1,12 = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 3\pi]$

$2\cos x + 1,12 = 0 \Longleftrightarrow \cos x = -0,56$

daraus erhält man zunächst in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$x_{1k} = \cos^{-1}(-0,56) + 2k\pi = 2,1652 + 2k\pi$ (gem. Taschenrechner)
$x_{2k} = (2\pi - 2,1652) + 2k\pi = 4,1180 + 2k\pi$

mit $k \in \mathbf{Z}$. Jetzt muß man sehen für welche $k \in \mathbf{Z}$ die Lösungen x_{1k} und x_{2k} in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 3\pi]$ liegen. Setze der Reihe nach

$k = 0$	in	x_{1k}	$\Longrightarrow$	$x_1 = 2,1652$
$k = 0$	in	x_{2k}	$\Longrightarrow$	$x_2 = 4,1180$
$k = 1$	in	x_{1k}	$\Longrightarrow$	$x_3 = 8,4484$

Für alle anderen $k \in \mathbf{Z}$ liegen x_{1k} bzw. x_{2k} nicht mehr in der Grundmenge $\mathcal{G}$. Es gibt also in $\mathcal{G} = [0; 3\pi]$ nur die obigen 3 Lösungen.

2.3) $4\tan x - 15 = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [-\pi; 2\pi]$

$4\tan x - 15 = 0 \Longleftrightarrow \tan x = 3,75$

daraus erhält man zunächst in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$x_k = \tan^{-1} 3,75 + k\pi = 1,3102 + k\pi$ (gem. Taschenrechner)

mit $k \in \mathbf{Z}$. Jetzt muß man sehen für welche $k \in \mathbf{Z}$ die Lösungen x_k in der Grundmenge $\mathcal{G} = [-\pi; 2\pi]$ liegen. Setze der Reihe nach in x_k ein:

$k = -1$	$\Longrightarrow$	$x_1 = 1,3102 - \pi = -1,8314$
$k = 0$	$\Longrightarrow$	$x_2 = 1,3102$
$k = 1$	$\Longrightarrow$	$x_3 = 1,3102 + \pi = 4,4518$

Für alle anderen $k \in \mathbf{Z}$ liegt x_k nicht mehr in der Grundmenge $\mathcal{G}$. Es gibt also in $\mathcal{G} = [-\pi; 2\pi]$ nur die obigen 3 Lösungen.

2.4) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [-2\pi; 2\pi]$

$$2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Longleftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

daraus erhält man zunächst in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$$x_{1k} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ (gem. Tabelle)}$$
$$x_{2k} = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

mit $k \in \mathbf{Z}$. Jetzt muß man sehen für welche $k \in \mathbf{Z}$ die Lösungen x_{1k} und x_{2k} in der Grundmenge $\mathcal{G} = [-2\pi; 2\pi]$ liegen. Setze der Reihe nach

$k = 0$ in x_{1k} $\Longrightarrow$ $x_1 = -\frac{\pi}{3}$

$k = 1$ in x_{1k} $\Longrightarrow$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$

$k = 0$ in x_{2k} $\Longrightarrow$ $x_3 = \frac{4\pi}{3}$

$k = -1$ in x_{2k} $\Longrightarrow$ $x_4 = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$

Für alle anderen $k \in \mathbf{Z}$ liegen x_{1k} bzw. x_{2k} nicht mehr in der Grundmenge $\mathcal{G}$. Es gibt also in $\mathcal{G} = [-2\pi; 2\pi]$ nur die obigen 4 Lösungen.

In den nachfolgenden Beispielen wird das Argument der trigonometrischen Funktion zunächst durch eine andere Variable substituiert (ersetzt):

2.5) $3\sin 2x + 1 = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$

Substituiere $z = 2x$, daraus $3\sin z + 1 = 0 \Longleftrightarrow \sin z = -\frac{1}{3}$

daraus erhält man zunächst in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$$z_{1k} = \sin^{-1}(-\tfrac{1}{3}) + 2k\pi = -0,3398 + 2k\pi \text{ (gem. Taschenrechner)}$$
$$z_{2k} = (\pi + 0,3398) + 2k\pi = 3,4814 + 2k\pi$$

daraus folgt wegen $z = 2x \iff x = \frac{z}{2}$ (Rücksubstitution)

$x_{1k} = \frac{z_{1k}}{2} = -0,1699 + k\pi$ und $x_{2k} = \frac{z_{2k}}{2} = 1,7407 + k\pi$

mit $k \in \mathbf{Z}$. Jetzt muß man sehen für welche $k \in \mathbf{Z}$ die Lösungen x_{1k} und x_{2k} in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$ liegen. Setze der Reihe nach

$$\begin{array}{llll} k = 0 & \text{in} & x_{2k} & \Longrightarrow & x_1 = 1,7407 \\ k = 1 & \text{in} & x_{1k} & \Longrightarrow & x_2 = 2,9717 \\ k = 1 & \text{in} & x_{2k} & \Longrightarrow & x_3 = 4,8823 \\ k = 2 & \text{in} & x_{1k} & \Longrightarrow & x_4 = 6,1133 \end{array}$$

Für alle anderen $k \in \mathbf{Z}$ liegen x_{1k} bzw. x_{2k} nicht mehr in der Grundmenge $\mathcal{G}$. Es gibt also in $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$ nur die obigen 4 Lösungen.

2.6) $20\cos\left(\frac{x}{4} + 2\right) = 9$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = \mathbf{R}$

Substituiere $z = \frac{x}{4} + 2$, daraus $20\cos z = 9 \iff \cos z = 0,45$

daraus erhält man in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$z_{1k} = \cos^{-1} 0,45 + 2k\pi = 1,1040 + 2k\pi$ (gem. Taschenrechner)
$z_{2k} = (2\pi - 1,104) + 2k\pi = 5,1792 + 2k\pi$

daraus folgt wegen $z = \frac{x}{4} + 2 \iff x = 4(z - 2)$ (Rücksubstitution)

$x_{1k} = 4(z_{1k} - 2) = -3,5839 + 8k\pi$ und $x_{2k} = 4(z_{2k} - 2) = 12,7166 + 8k\pi$

mit $k \in \mathbf{Z}$.

2.7) $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = \mathbf{R}$

Substituiere $z = 3x - \frac{\pi}{3}$, daraus $2\cos z + 1 = 0 \iff \cos z = -\frac{1}{2}$

daraus erhält man in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$z_{1k} = \cos^{-1}(-0,5) + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (gem. Tabelle)

$z_{2k} = \left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

daraus folgt wegen $z = 3x - \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}\left(z + \frac{\pi}{3}\right)$ (Rücksubstitution)

$x_{1k} = \frac{1}{3}\left(z_{1k} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ und $x_{2k} = \frac{1}{3}\left(z_{2k} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$

mit $k \in \mathbf{Z}$.

2.8) $\tan(1-2x) + 4 = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = \mathbf{R}$

Substituiere $z = 1 - 2x$, daraus $\tan z + 4 = 0 \Longleftrightarrow \tan z = -4$

daraus erhält man in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$z_k = \tan^{-1}(-4) + k\pi = -1,3258 + k\pi$ (gem. Taschenrechner)

daraus folgt wegen $z = 1 - 2x \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}(1-z)$ (Rücksubstitution)

$x_k = \frac{1}{2}(1 - z_k) = 1,1629 - \frac{k\pi}{2}$ mit $k \in \mathbf{Z}$.

2. Lösung durch Rückführung auf den Tangens

2.9) $2\sin x + \cos x = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = \mathbf{R}$

Hier muß $\cos x \neq 0$ sein, denn wäre $\cos x = 0$, dann wäre auch $\sin x = 0$, was nicht geht. sin und cos können nicht gleichzeitig Null sein!

$2\sin x + \cos x = 0 | : \cos x \Longleftrightarrow 2\tan x + 1 = 0 \Longleftrightarrow \tan x = -0,5$

daraus erhält man in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$x_k = \tan^{-1}(-0,5) + k\pi = -0,4636 + k\pi$ (gem. Taschenrechner)

die Lösung kann auch so geschrieben werden

$x_k = (-0,4636 + \pi) + k\pi = 2,6779 + k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$.

2.10) $3\cos 2x = 2\sin 2x$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [-\pi; \pi]$

Hier muß $\cos 2x \neq 0$ sein, denn wäre $\cos 2x = 0$, dann wäre auch $\sin 2x = 0$, was nicht geht. sin und cos können nicht gleichzeitig Null sein!

$3\cos 2x = 2\sin 2x| : \cos 2x \Longleftrightarrow 3 = 2\tan 2x \Longleftrightarrow \tan 2x = 1,5$

daraus erhält man zunächst in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$2x_k = \tan^{-1}(1,5) + k\pi = 0,9828 + k\pi$ (gem. Taschenrechner)

d. h. $x_k = 0,4914 + \dfrac{k\pi}{2}$ mit $k \in \mathbf{Z}$

Jetzt muß man sehen für welche $k \in \mathbf{Z}$ die Lösungen x_k in der Grundmenge $\mathcal{G} = [-\pi; \pi]$ liegen. Setze der Reihe nach in x_k ein:

$$\begin{array}{lll} k = -2 & \Longrightarrow & x_1 = -2,6502 \\ k = -1 & \Longrightarrow & x_2 = -1.0794 \\ k = 0 & \Longrightarrow & x_3 = 0,4914 \\ k = 1 & \Longrightarrow & x_4 = 2,0622 \end{array}$$

Für alle anderen $k \in \mathbf{Z}$ liegt x_k nicht mehr in der Grundmenge $\mathcal{G}$. Es gibt also in $\mathcal{G} = [-\pi; \pi]$ nur die obigen 4 Lösungen.

2.11) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2} = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = \mathbf{R}$

Hier muß $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ sein, denn wäre $\cos\frac{x}{2} = 0$, dann wäre auch $\sin\frac{x}{2} = 0$, was nicht geht. sin und cos können nicht gleichzeitig Null sein!

$\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2} = 0 | : \cos\frac{x}{2} \iff \sqrt{3}\tan\frac{x}{2} + 3 = 0$

d. h. $\tan\frac{x}{2} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

daraus erhält man in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$$\frac{x_k}{2} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ (gem. Tabelle) d. h. } x_k = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbf{Z}$$

Man kann die Lösung auch positiv so schreiben

$$x_k = \left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbf{Z}.$$

2.12) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$

Substituiere $z = x + \frac{\pi}{4} \iff x = z - \frac{\pi}{4}$, daraus folgt

$\sin z + \cos z = 0 | : \cos z \iff \tan z + 1 = 0 \iff \tan z = -1$

daraus erhält man zunächst in der Grundmenge der reellen Zahlen alle Lösungen, nämlich

$$z_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ gem. Tabelle} \Longrightarrow x_k = z_k - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k \in \mathbf{Z}$$

Jetzt muß man sehen für welche $k \in \mathbf{Z}$ die Lösungen x_k in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$ liegen. Setze der Reihe nach in x_k ein:

$$k = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

Für alle anderen $k \in \mathbf{Z}$ liegt x_k nicht mehr in der Grundmenge $\mathcal{G}$. Es gibt also in $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$ nur die obigen 2 Lösungen.

3. Lösung durch Ausklammern

2.13) $\sin 2x + \cos x = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [-\pi; \pi]$

Gem. Additionstheorem gilt $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, deshalb folgt

$2\sin x \cos x + \cos x = 0 \iff \cos x(2\sin x + 1) = 0$, daraus:

Ist $\cos x = 0 \Longrightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$ (alle Lösungen in $\mathbf{R}$)

zulässig (d. h. damit $x_k \in [-\pi; \pi]$) sind nur die Lösungen für

$k = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2}$

$k = -1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

Ist $2\sin x + 1 = 0 \iff \sin x = -\frac{1}{2}$, dann sind alle Lösungen

$x_{1k} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ gem. Tabelle und $x_{2k} = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

mit $k \in \mathbf{Z}$. Zulässig sind nur die Lösungen für

$k = 0 \quad \text{in} \quad x_{1k} \quad \Longrightarrow \quad x_3 = -\frac{\pi}{6}$

$k = -1 \quad \text{in} \quad x_{2k} \quad \Longrightarrow \quad x_4 = -\frac{5\pi}{6}$

Damit ist die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right\}$.

2.15) $\sin 2x + \sin x = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; \pi]$

Gem. Additionstheorem gilt $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, deshalb folgt

$2\sin x \cos x + \sin x = 0 \iff \sin x(2\cos x + 1) = 0$, daraus:

Ist $\sin x = 0 \Longrightarrow x_k = k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$ (alle Lösungen in $\mathbf{R}$)

zulässig (d. h. damit $x_k \in [0;\pi]$) sind nur die Lösungen für

$k = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \quad$ und $\quad k = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \pi$

Ist $2\cos x + 1 = 0 \Longleftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$

gem. Tabelle ist hier $x_3 = \dfrac{2\pi}{3}$ die einzige Lösung in $\mathcal{G} = [0;\pi]$

Damit ist die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{0; \dfrac{2\pi}{3}; \pi\right\}$.

2.16) $4\cos^2 x + 3\cos x = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [-2\pi;\pi]$

$4\cos^2 x + 3\cos x = 0 \Longleftrightarrow \cos x(4\cos x + 3) = 0$, daraus:

Ist $\cos x = 0 \Longrightarrow x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$ (alle Lösungen in $\mathbf{R}$)

zulässig (d. h. damit $x_k \in [-2\pi;\pi]$) sind nur die Lösungen für

$$\begin{aligned}
k &= 0 && \Longrightarrow && x_1 = \frac{\pi}{2} \\
k &= -1 && \Longrightarrow && x_2 = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \\
k &= -2 && \Longrightarrow && x_3 = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ist $4\cos x + 3 = 0 \Longleftrightarrow \cos x = -0,75$, dann sind alle Lösungen

$x_{1k} = \cos^{-1}(-0,75) + 2k\pi = 2,4189 + 2k\pi$ gem. Taschenrechner

$x_{2k} = (2\pi - 2,4189) + 2k\pi = 3,8643 + 2k\pi$

mit $k \in \mathbf{Z}$. Zulässig sind nur die Lösungen für

$$\begin{aligned}
k &= -1 && \text{in} && x_{1k} && \Longrightarrow && x_4 = 2,4189 - 2\pi = -3,8643 \\
k &= -1 && \text{in} && x_{2k} && \Longrightarrow && x_5 = 3,8643 - 2\pi = -2,4189 \\
k &= 0 && \text{in} && x_{1k} && \Longrightarrow && x_6 = 2,4189
\end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; -3,8643; -2,4189; 2,4189\right\}.$$

4. Lösung durch Rückführung auf eine quadratische Gleichung

2.17) $\sin^2 x + 4 \sin x = 5$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = \mathbf{R}$

Substituiere $z = \sin x$, dann erhält man die quadratische Gleichung

$$z^2 + 4z = 5 \Longleftrightarrow z^2 + 4z - 5 = 0$$

mit den Lösungen

$z_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = -2 \pm 3$, d. h. $z_1 = 1$ oder $z_2 = -5$.

Daraus erhält man die Gleichungen

$\sin x = z_1 = 1 \Longrightarrow x_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$

Die zweite Gleichung $\sin x = z_2 = -5$ ist jedoch nicht lösbar. Insgesamt hat man also die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbf{Z} \right\}$.

2.18) $\cos 2x - 3 \sin x = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$

Gem. Additionstheorem und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

Daraus erhält man die Gleichung $1 - 2\sin^2 x - 3 \sin x = 0$.

Substituiere $z = \sin x$, dann erhält man die quadratische Gleichung

$$1 - 2z^2 - 3z = 0 \Longleftrightarrow 2z^2 + 3z - 1 = 0$$

mit den Lösungen

$z_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$, d. h. $z_1 = 0,281$ oder $z_2 = -1,78$.

Daraus erhält man die Gleichung ($z_2 = -1,78$ scheidet aus)

$\sin x = z_1 = 0,281$ und daraus die beiden Lösungen

$$x_1 = \sin^{-1} 0,281 = 0,2846 \text{ und } x_2 = \pi - x_1 = 2,8570$$

2.19) $\cos 2x = \cos^2 x$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = \mathbf{R}$

Gem. Additionstheorem und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

Daraus erhält man die Gleichung $2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x$.

Substituiere $z = \cos x$, dann erhält man die quadratische Gleichung

$$2z^2 - 1 = z^2 \Longleftrightarrow z^2 = 1 \Longleftrightarrow z_1 = 1 \text{ oder } z_2 = -1$$

Daraus erhält man die Gleichungen $\cos x = 1$ oder $\cos x = -1$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x_k = k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$. Die Lösungsmenge ist somit $\mathcal{L} = \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$.

2.20) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$ in der Grundmenge $\mathcal{G} = [0; 2\pi]$

Wie in Afg. 2.19) erhält man wegen $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ die Gleichung

$$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x + 2 = 0 \Longleftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

Substituiere $z = \cos x$, dann erhält man die quadratische Gleichung $2z^2 - 3z + 1 = 0$ mit den Lösungen

$$z_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}, \text{ d. h. } z_1 = 1 \text{ oder } z_2 = 0,5.$$

Daraus erhält man die Gleichungen

$$\cos x = z_1 = 1 \quad \Longleftrightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 2\pi$$

$$\cos x = z_2 = 0,5 \Longleftrightarrow x_3 = \frac{\pi}{3} \text{ oder } x_4 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

Insgesamt hat man also die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{0; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; 2\pi\right\}$.