26P. **Aufgabe 1:**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$$

(5) a) Ermitteln Sie für die obige Funktion f den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.
Stellen Sie $f(x)$ in der Form $f(x) = p(x) + \frac{c}{x-1}$ mit einem Polynom $p(x)$ und einer Konstanten c dar.

(1) max. Def.bereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f(x) = 0 \iff x^2 + 3x = 0 \iff x(x+3) = 0$

$\boxed{x_1 = 0}$; $\boxed{x_2 = -3}$

(1) (1)

	1	3	0
1	0	1	4
Σ	1	4	4

$\Rightarrow \boxed{f(x) = x + 4 + \frac{4}{x-1}}$ (2)

(4) b) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von $f(x)$ für $|x| \longrightarrow \infty$ und an den Polstellen. Stellen Sie alle Asymptotengleichungen auf.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x + 4 + \frac{4}{x-1}\right) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(1) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} \left(\frac{x^2 + 3x}{x-1}\right) = \frac{4}{0+} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \frac{4}{0-} = -\infty$

(1) Vertikale Asymp: $\boxed{x = 1}$; schiefe Asymp: $\boxed{y = x + 4}$ (1)

(6) **zu Aufgabe 1:** $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$

c) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x)}{(x-1)^2}$$

(3) $$= \frac{2x^2+x-3-x^2-3x}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}$$

(3) $$= \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x+6}{(x-1)^3}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}}$$

[Ergebnis: $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ und $f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$]

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}; \quad f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; \quad f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}\right]$

(4) d) Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema von f.

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\iff (x+1)(x-3) = 0$$

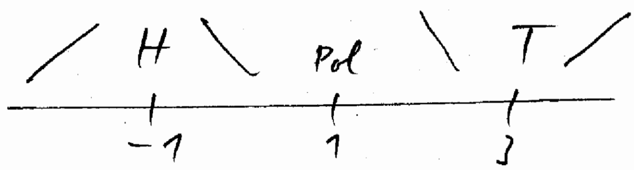
$$\boxed{x_1 = -1}\,; \quad \boxed{x_2 = 3}$$

$$f''(-1) = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \Rightarrow \text{lok. Max } \boxed{H(-1|1)} \quad (2)$$

$$f''(3) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow \text{lok. Min } \boxed{T(3|9)} \quad (2)$$

(3) e) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten von f.

(2) <u>Monotonie</u>



$$f \text{ ist } \begin{cases} \text{mon. steigend für } x < -1 \vee x > 3 \\ \text{mon. fallend für } -1 < x < 3\,;\ x \neq 1 \end{cases}$$

(1) <u>Krümmung</u>

$$f''(x) \begin{cases} > 0 \text{ für } x > 1 \quad (\text{linksgekrümmt}) \\ < 0 \text{ für } x < 1 \quad (\text{rechtsgekrümmt}) \end{cases}$$

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}; \quad f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; \quad f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3} \right]$

(4) **f)** Zwei parallele Tangenten t_1 und t_2 mit der Steigung -3 berühren den Graphen von f in den Punkten B_1 und B_2. Stellen Sie die Gleichungen von t_1 und t_2 auf. [**Hinweis:** Ermitteln Sie zunächst die Koordinaten von B_1 und B_2]

$$f'(x) = -3 \iff \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = -3$$

$$\iff x^2-2x-3 = -3(x^2-2x+1)$$

(1) $$\iff x^2-2x\cancel{-3} = -3x^2+6x\cancel{-3}$$

$$\iff 4x^2-8x = 0 \quad | :4$$

$$\iff x^2-2x = 0 \iff x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \implies \boxed{B_1(0|0)}$$ (1)

$$x_2 = 2 \implies \boxed{B_2(2|10)}$$

$$t_1(x) = -3x+b_1 \implies 0 = -3\cdot 0 + b_1 \implies b_1 = 0$$

$$\implies \boxed{t_1(x) = -3x}$$ (1)

$$t_2(x) = -3x+b_2 \implies 10 = -6+b_2 \implies b_2 = 16$$

$$\implies \boxed{t_2(x) = -3x+16}$$ (1)

Klausur Bau-Mathe 1 WS 09/10 am 26.01.10

24 P. **Aufgabe 1:**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2}$$

(3) a) Ermitteln Sie für die obige Funktion f den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.

(1) $\boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

$f(x) = 0 \iff 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -2$

$\boxed{N_1(-\frac{1}{2}/0)}$ $\boxed{N_2(-2/0)}$

(1) (1)

(3) b) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von $f(x)$ für $|x| \longrightarrow \infty$ und an den Polstellen. Geben Sie die Asymptotengleichungen an.

$f(x) = 2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}$

$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \lim_{|x| \to \infty} \left(2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 2 + 0 + 0 = 2$

$\Longrightarrow$ horizontale Asymp: $\boxed{y = 2}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2} = \frac{2}{0+} = \infty$

$\Longrightarrow$ vertikale Asymp: $\boxed{x = 0}$

zu Aufgabe 1: $f(x) = \dfrac{2x^2+5x+2}{x^2}$

(6) c) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$.

$$(3)\quad f'(x) = \frac{(4x+5)x^2 - 2x(2x^2+5x+2)}{x^4}$$

$$= \frac{(4x+5)x - 2(2x^2+5x+2)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{4x^2}+5x-\cancel{4x^2}-10x-4}{x^3}$$

$$= \frac{-5x-4}{x^3}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}}$$

$$(3)\quad f''(x) = -\frac{5x^3-3x^2(5x+4)}{x^6}$$

$$= -\frac{5x-3(5x+4)}{x^4}$$

$$= -\frac{5x-15x-12}{x^4}$$

$$= -\frac{-10x-12}{x^4}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{10x+12}{x^4}}$$

[Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{5x+4}{-x^3}$ und $f''(x) = \dfrac{10x+12}{x^4}$]

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^2}; \quad f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}; \quad f''(x) = \frac{10x+12}{x^4} \right]$

(6) d) Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema sowie Wendepunkte von f. Stellen Sie die Gleichung der Tangente an f bei $x = -0,5$ auf.

(2) <u>Lokale Extrema</u>

(1) $f'(x) = 0 \iff 5x+4 = 0 \iff x = -\frac{4}{5}$

(1) $\left\{ \begin{array}{l} f''(-\frac{4}{5}) = \frac{-8+12}{(-4/5)^4} = \frac{4}{(4/5)^4} > 0 \\ \Rightarrow \text{lokales Minimum} \quad \boxed{T(-\frac{4}{5} \mid -\frac{9}{8})} \end{array} \right.$

(2) <u>Wendepunkte</u>

(1) $f''(x) = 0 \iff 10x+12 = 0 \iff x = -\frac{6}{5}$

(1) wegen VZW von $f''(x) \Rightarrow$ Wendepunkt $\boxed{W(-\frac{6}{5} \mid -\frac{7}{9})}$

(2) <u>Tangente</u>

$$t(x) = f'(-0,5)(x+\tfrac{1}{2}) + \underbrace{f(-0,5)}_{=0 \text{ wegen a)}}$$

$$= 12(x+\tfrac{1}{2}) = 12x+6$$

$$\boxed{t(x) = 12x+6}$$

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^2}; \quad f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}; \quad f''(x) = \frac{10x+12}{x^4}\right]$

(3) e) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten von f.

(2) Monotonie

$\searrow \; T \; \nearrow \; P \; \searrow$ da $\lim\limits_{\cancel{x \to 0}} f(x) = \infty$

$-\frac{4}{5} \qquad 0$

oder auch: $f'(x) < 0$ für $x > 0$

$$f \text{ ist } \begin{cases} \text{mon steigend für } -\frac{4}{5} < x < 0 \\ \text{mon fallend für } x < -\frac{4}{5} \lor x > 0 \end{cases}$$

(1) Krümmung

$$f''(x) \begin{cases} > 0 \text{ für } \overset{x \neq 0}{x > -\frac{6}{5}} \text{ (linksgekrümmt)} \\ < 0 \text{ für } x < -\frac{6}{5} \text{ (rechtsgekrümmt)} \end{cases}$$

(3) f) Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im dritten Quadranten einschließt, d. h. im Intervall $[-2; -0,5]$.

$$A = \left| \int_{-2}^{-0,5} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{-2}^{-0,5} \left(2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx \right|$$

$$= \left| \left[2x + 5\ln|x| - \frac{2}{x} \right]_{-2}^{-0,5} \right| \quad (2)$$

$$= \left| \left(-1 + 5\ln \overbrace{0,5}^{=2^{-1}} + 4\right) - \left(-4 + 5\ln 2 + 1\right) \right|$$

$$= \left| 3 - 5\ln 2 + 4 - 5\ln 2 - 1 \right|$$

$$= \left| 6 - 10\ln 2 \right| \approx \boxed{0,9315 \text{ FE}} \quad (1)$$

Klausur Mathe 1 / Bau SS2008

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 - 18x^2 + 54x - 53}{x^2 - 6x + 9}$$

(5) a) Zeigen Sie mit Hilfe der Polynomdivision, dass die Funktion auch in der Form

$$f(x) = 2x - 6 + \frac{1}{(x-3)^2}$$

darstellbar ist.

$$(2x^3 - 18x^2 + 54x - 53) : (x^2 - 6x + 9) = 2x - 6 + \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$$
$$-(2x^3 - 12x^2 + 18x)$$
$$-6x^2 + 36x - 53$$
$$-(-6x^2 + 36x - 54)$$
$$1$$

Ferner ist $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

(4) b) Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich, alle Nullstellen und die Gleichungen aller Asymptoten.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; vertikale A: $x = 3$
schiefe A: $y = 2x - 6$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff 2(x-3) = -\frac{1}{(x-3)^2} \quad \Big| \cdot \frac{(x-3)^2}{2}$$
$$\iff (x-3)^3 = -\frac{1}{2} \quad \Big| \sqrt[3]{}$$
$$\iff x = 3 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 2{,}2063$$

(2) c) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, d.h. an der Polstelle und für $x \longrightarrow \infty$ sowie $x \longrightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6 - 6 + \frac{1}{0+} = \infty \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}\right\} (1)$$

noch Aufgabe 1: $f(x) = 2x - 6 + \dfrac{1}{(x-3)^2}$

(7) d) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$ und ermitteln Sie Art und Lage aller lokalen Extrema sowie Wendepunkte.

(4)
$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-3)^3} = 2\left(1 - \frac{1}{(x-3)^3}\right)$$
$$f''(x) = \frac{6}{(x-3)^4} > 0$$

(2)
$$f'(x) = 0 \iff 1 = \frac{1}{(x-3)^3} \iff (x-3)^3 = 1 \iff x = 4$$
$\Rightarrow$ lokales Minimum $T(4/3)$

(1) Wegen $f'' \neq 0$ keine Wendepunkte

(4) e) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten.

(3)
$$\begin{array}{ccccc} + & \text{Pol} & - & T & + \\ \hline & 3 & & 4 & \end{array}$$

Für $x < 3 \Rightarrow f'(x) = 2 - \underbrace{\frac{2}{(x-3)^3}}_{<0} > 0$

Somit f ist $\begin{cases} \text{monoton wachsend für } x < 3 \text{ oder } x > 4 \\ \quad '' \quad \text{fallend für } 3 < x < 4 \end{cases}$

(1) wegen $f'' > 0$ ist f überall linksgekrümmt

(7) f) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\int (2x-6)\,dx + \int \frac{dx}{(x-3)^2}\right]_0^1$$
$$= \left[x^2 - 6x - \frac{1}{x-3}\right]_0^1$$
$$= 1 - 6 - \frac{1}{-2} - \left(-\frac{1}{-3}\right)$$
$$= -5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -5 + \frac{3-2}{6} = -5 + \frac{1}{6}$$
$$= -4\frac{5}{6} = -4{,}8\overline{3}$$

24 P.