

Übungsaufgaben zur Prüfungsvorbereitung:

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } y = \sin x - x \cos x & \text{b) } y = (x^2 - 3)\sin x + 2x \cos x & \\
 \text{c) } y = \sqrt{e^x} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) & \text{d) } y = 3\sin(2x) + (\pi - 6x) \cos(2x) & \\
 \text{e) } y = \frac{x^2 + 3}{(1 - 3x)^2} & \text{f) } y = \sqrt{\frac{2x + 1}{1 - x}} & \text{g) } y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) \\
 \text{h) } y = \frac{2 \cos x - \sin x}{\cos x + 2 \sin x} & \text{i) } y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{j) } y = e^{-x^2} \ln(x^3 + 1)
 \end{array}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1} \quad g(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2} \quad h(x) = 2x - 6 + \frac{1}{(x - 3)^2}$$

Bearbeiten Sie für die obigen Funktionen die folgenden Aufgaben:

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.
- Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten bei $|x| \rightarrow \infty$ und an evtl. Polstellen. Geben Sie sodann die Gleichungen aller Asymptoten an.
- Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen.
- Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema sowie evtl. Wendepunkte.
- Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten. Geben Sie dazu die maximalen Monotonie- und Krümmungsintervalle an.
- Stellen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(-0,5|?)$ auf.
- Welche Tangenten an den Graphen von f haben die Steigung -3 ?
- Ermitteln Sie den Krümmungsradius r sowie den Mittelpunkt $M(a|b)$ des Krümmungskreises, der den Graphen von h an der Stelle $x_0 = 4$ berührt. Es gelten die Formeln

$$a = x_0 - \frac{y'(1+(y')^2)}{y''} \quad b = \frac{1+(y')^2}{y''} + y \quad r = \frac{(1+(y')^2)^{1,5}}{|y''|}$$

wobei $y = h(x_0)$, $y' = h'(x_0)$ und $y'' = h''(x_0)$ gilt.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens eine Näherungslösung x_n für die Gleichung

$$2,4 \ln x + 0,5x^2 + 1 = 0$$

so dass

$$2,4 \ln x_n + 0,5x_n^2 + 1 = 0,0000$$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a) $\int \frac{5x + 8}{6x^2 - 5x - 4} dx$ b) $\int \frac{2 - 4x}{e^{2x}} dx$ c) $\int_{-1}^0 \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx$
- d) $\int \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} dx$ e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x^2 - 1) \sin x dx$ f) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
- g) $\int \frac{\sqrt{\ln(x^2 + 1)}}{x + \frac{1}{x}} dx$ h) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x} dx$ i) $\int \frac{(1 - x) \sin(x - \ln x)}{x} dx$
- j) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx$ k) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ l) $\int_0^{\sqrt{e^4 - 1}} \frac{\ln \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{1 + x^{-2}}} dx$
- m) $\int a^2 t e^{-\frac{a}{b}t} dt$ n) $\int_2^3 \sqrt{4x - 7} dx$ o) $\int e^{-\frac{mgh}{kT}} dh$

Verwenden Sie für die Teilaufgabe l) das Integral $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$.

Aufgabe 5:

Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = (2x - 3)(x^2 - 10) \quad \text{und} \quad g(x) = 3x(x + 2)$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A , die von den Graphen von f und g eingeschlossen wird. (Beachten Sie, dass A aus mehreren Teilen bestehen kann!) [Teilergebnis: Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$ bei $x = -3; 1; 5$]

Aufgabe 6:

Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Fahrstuhls sei in Abhängigkeit von der Zeit t für $0s \leq t \leq 10s$ gegeben durch die Funktion

$$v(t) = -7 \left(\frac{t}{5} - 1 \right)^4 + 7 \quad \text{in } m/s$$

- Ermitteln Sie die Weg-Zeit-Funktion $s(t)$, d. h. die Stammfunktion von $v(t)$ mit Anfangswert $s(0) = 0$.
- Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen gerundet den zurückgelegten Weg des Fahrstuhls [in m] im Intervall $[1s; 2s]$.

Aufgabe 7:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{0,5} \cos(\sqrt{x}) dx$$

numerisch mit Hilfe der Trapezformel durch Zerlegung des Integrationsintervalls in 5 Teilintervalle (auf 5 Stellen hinter dem Komma genau).

Aufgabe 8:

Die Kurven

$$y = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad y = -x + 6$$

begrenzen mit der x -Achse ein Flächenstück. Skizzieren Sie den durch Rotation dieses Flächenstücks um die x -Achse erzeugten Rotationskörper und berechnen Sie dessen Volumen im Intervall $[0; 6]$.

Aufgabe 9:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a) } 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \frac{5}{81} + \dots \quad \text{und} \quad \text{b) } 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots$$

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich von c) $P(x) = 1 + x + \frac{3x^2}{4} + \frac{4x^3}{8} + \frac{5x^4}{16} + \dots$

Aufgabe 10:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung die 1., 2. und 3. Näherung von

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

in einer Umgebung von $x_0 = 0$. Berechnen Sie die Näherungswerte an der Stelle $x = 0,5$.

Um wieviel % weichen die Näherungswerte jeweils vom exakten Wert ab? (Berechnung auf jeweils 6 Stellen hinter dem Komma genau)