Lösungen zum Übungsblatt 8a:

Aufgabe 1:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(n+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} = 0$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = 1$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left((\frac{2}{3})^n+1\right)}{3^n\left(1+(\frac{4}{3})^n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n+1}{1+(\frac{4}{3})^n} = 0$$

Dabei ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{wegen} \quad \frac{2}{3} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty \quad \text{wegen} \quad \frac{4}{3} > 1$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n+\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = 0$$

e) Zunächst gilt für $n \geq 3$

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \\ &\geq \frac{n!}{3!(n-3)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \end{aligned}$$

Daraus folgt für $n \geq 3$

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{2^n} &\leq \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{6n}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{6}{(1-\frac{1}{n})(n-2)} = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \cdot \frac{6}{n-2} \\ &\longrightarrow 1 \cdot 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Letzters ist eine nullkonvergente Majorante, daher folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

f) $\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{2}{n} \cdot \dfrac{3}{n} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n-1}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

letzteres ist wieder eine nullkonvergente Majorante, daher folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

denn

$$\frac{2}{5} < 1 \text{ und } \frac{3}{5} < 1$$

h)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \;=\; 0
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+3)!}{2(n+1)!}\cdot\frac{2n!}{(n+2)!} \\
&= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{2(n+1)!}\cdot\frac{2n!}{(n+2)(n+1)n!} \\
&= \frac{(n+3)(n+2)}{2}\cdot\frac{2}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{n+3}{n+1} \;=\; \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \;=\; \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Aufgabe 2:

$$s_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} = \infty, \text{ denn } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$$

$$s_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$s_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \text{ ist konvergent.}$$

Sei dazu

$$a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\big((n+1)!\big)^2}{\big(2(n+1)\big)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&= \Big(\frac{(n+1)!}{n!}\Big)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\
&= \Big(\frac{(n+1)n!}{n!}\Big)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{n+1}{4n+2} = \frac{n\big(1+\frac{1}{n}\big)}{n\big(4+\frac{2}{n}\big)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{1}{4} < 1$$

und damit nach dem Quotientenkriterium die Konvergenz von s_3.

$s_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{5n}}{n^{5n}} = \infty$, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{5n}}{n^{5n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{5n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^5 = e^5 \neq 0$$

$s_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ist konvergent nach dem Leibnizkriterium, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ und } \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ monoton fallend}$$

$s_6 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ist absolut konvergent.

Dabei heißt eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent } \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = e^{x^2}$$

d. h. e^{x^2} ist eine konvergente Majorante für die links stehende Reihe.
Damit ist s_6 absolut konvergent, also konvergent.
Nebenbei bemerkt ist $s_6 = \cos(x)$.

Aufgabe 3:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} x^i = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$, denn $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n x = x \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n \overset{\text{a)}}{=} \frac{x}{1-x^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{3}{4}\Big)^n = \frac{1}{1-\Big(-\frac{3}{4}\Big)} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}$

d)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^n - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n - 1 \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} - 2 \\
&= 2 + \frac{1}{\frac{4}{3}} - 2 \;=\; \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$\square$