Lösungen zum Blatt 3 (Analytische Geometrie):

Aufgabe 1:

Gegeben: $A(3|1|-2)$, $B(5|2|-3)$, $P(6|2|-7)$

a) Geradengleichung von g durch A und B aufstellen

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB}$$

$$\boxed{g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

zeige $P \notin g$: $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

liefert LGS:

I. $6 = 3 + 2\lambda \iff \lambda = 1{,}5$

II. $2 = 1 + \lambda \iff \lambda = 1$ ↯

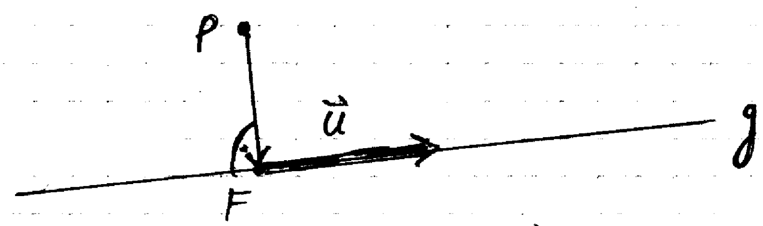
III. $-7 = -2 - \lambda$

I und II liefern widersprüchliche Werte für λ

$\implies P \notin g$.

---

b)



Bestimme $F \in g$ mit $\overrightarrow{PF} \perp \vec{u}$

da $F \in g \implies F(3+2\lambda \mid 1+\lambda \mid -2-\lambda)$

$$0 = \vec{u} \circ \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3+2\lambda \\ -1+\lambda \\ 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 2(-3+2\lambda) + 1\cdot(-1+\lambda) - 1\cdot(5-\lambda)$$

$$= -6 + 4\lambda - 1 + \lambda - 5 + \lambda$$

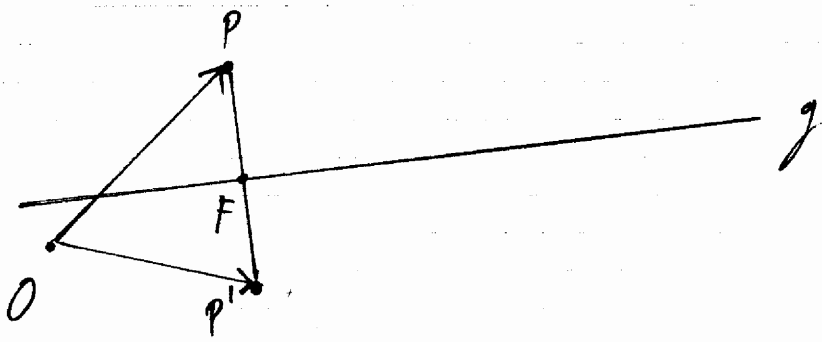
$$0 = 6\lambda - 12 \iff \lambda = 2$$

$\implies \boxed{F(7|3|-4)}$; $\boxed{\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

c) Abstand $d(P,g)$ berechnen:

$$d(P,g) = |\vec{PF}| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+1+9} = \boxed{\sqrt{11}}$$

d)



bekannter Umweg:

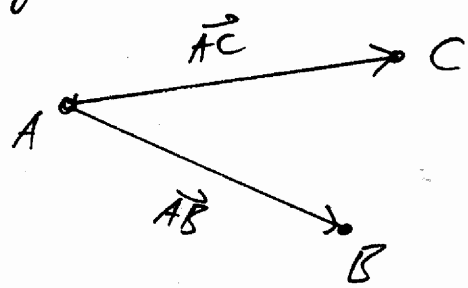
$$\vec{OP'} = \vec{OP} + 2\vec{PF} = \begin{pmatrix}6\\2\\-7\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{P'(8|4|-1)}$

Aufgabe 2:

Gegeben: $A(1|0|-2)$, $B(5|0|-1)$, $C(1|1|0)$, $P(-1|18|-7)$

a) Gleichung der Ebene E durch A, B, C bestimmen:



Nehme als Aufpunkt $A(1|0|-2)$

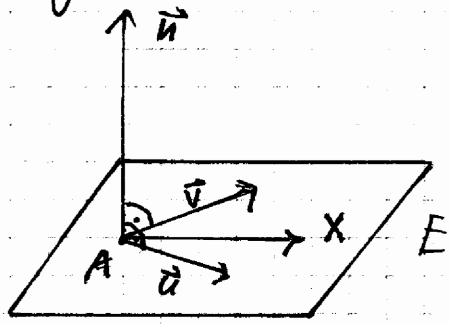
$\vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{AC} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ Richtungsvektoren

$E: \vec{x} = \vec{OA} + \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$

$$\boxed{E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}} \; ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(Parameterform)

Umwandlung in Normalenform : ③



Normalenvektor : $\vec n = \vec v \times \vec u = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$

Normalengleichung : $\vec n \circ \vec{AX} = 0 \iff \vec n \cdot (\vec x - \vec a) = 0$

$\iff \vec n \circ \vec x - \vec n \circ \vec a = 0$

$E: \ \vec n \circ \vec x - \vec n \cdot \vec a = 0$

$$\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = 0$$

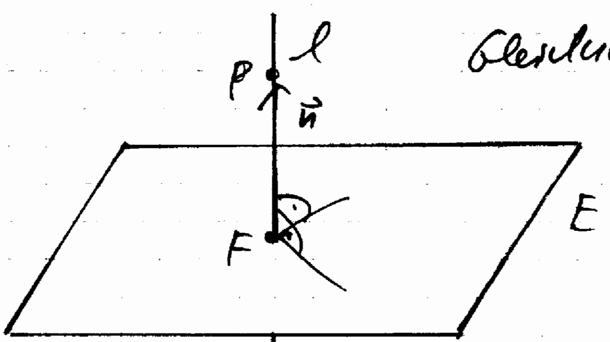
$$x_1 + 8x_2 - 4x_3 - (1+8) = 0$$

$$\boxed{E: \ x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 9 = 0}$$

(Normalen- bzw. Koordinatenform)

---

b)



Gleichung für Lotgerade ℓ ?

$\ell \perp E$

$\ell: \vec x = \vec{OP} + \lambda \vec n$

$$\boxed{\ell: \vec x = \begin{pmatrix}-1\\18\\-7\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}}$$

Lotgerade

c) Lotfußpunkt $F \in E$ ermitteln:

da $F \in l \Rightarrow F(-1+\lambda \mid 18+8\lambda \mid -7-4\lambda)$

allg. Geradenpunkt F in E einsetzen:

$$0 = -1+\lambda+8(18+8\lambda)-4(-7-4\lambda)-9$$
$$= -1+\lambda+144+64\lambda+28+16\lambda-9$$
$$0 = 81\lambda+162 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

$\Rightarrow$ Fußpunkt $\boxed{F(-3 \mid 2 \mid 1)}$

Abstand $d(P,E)$ berechnen:

$$d(P,E) = |\overrightarrow{PF}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-16\\8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16^2+64} = \boxed{18}$$

Aufgabe 3: $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\t\\-t\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\t+6\\-1\end{pmatrix}$; $E: 4x_1+x_2+2x_3-4=0$

a) Bestimme $t \in \mathbb{R}$ mit $g_t \perp E \Leftrightarrow \vec{u}_t \parallel \vec{n}_E$

$$\Leftrightarrow \lambda\begin{pmatrix}-2\\t+6\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I.} & -2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = -2 \\ \text{II.} & \lambda(t+6) = 1 \Leftrightarrow \boxed{t = -6{,}5} \\ \text{III} & -\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = -2 \end{array}$$

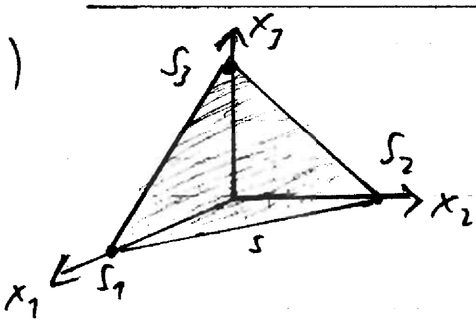
---

b) Zeige $g_4 \subset E$: setze allg. Geradenpunkt von g_4 in E ein:

$$4(2-2\lambda)+(4+10\lambda)+2(-4-\lambda)-4$$
$$= 8-\cancel{8\lambda}+4+\cancel{10\lambda}-8-\cancel{2\lambda}-4 = 0 \Rightarrow g_4 \subset E.$$

---

c)



S_1: $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow 4x_1 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$
$\Rightarrow \boxed{S_1(1 \mid 0 \mid 0)}$

S_2: $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow x_2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$
$\Rightarrow \boxed{S_2(0 \mid 4 \mid 0)}$

S_3: $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow 2x_3 - 4 = 0$
$\Rightarrow x_3 = 2 \Rightarrow \boxed{S_3(0 \mid 0 \mid 2)}$

$s: \vec{x} = \overrightarrow{OS_1} + \lambda\overrightarrow{S_1S_2} \Rightarrow \boxed{s: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}}$
(Schnittgerade)

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}8\\2\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$$

d) $F \parallel E \Rightarrow F: 4x_1+x_2+2x_3+c = 0$

$P \in F \Rightarrow 4 \cdot 5 - 3 + 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -19 \Rightarrow \boxed{F: 4x_1+x_2+2x_3-19=0}$