Klausur Bau-Mathematik II — WS 2018/19

**Aufgabe 1:** (14 Pkt)

(4) a) Ermitteln Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$\frac{4z+3}{5} = z + \frac{5-z}{z} \quad | \cdot 5z$$

$$z(4z+3) = 5z^2 + 5(5-z) \checkmark$$

$$4z^2 + 3z = 5z^2 + 25 - 5z \Leftrightarrow z^2 - 8z + 25 = 0 \checkmark$$

$$z_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-100}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = 4+3i} \checkmark ; \quad \boxed{z_2 = 4-3i} \checkmark$$

(6) b) Eine Lösung der obigen Gleichung lautet $z = 4 + 3i$. Setzen Sie diese Lösung in die gegebene Bruchgleichung aus a) ein und rechnen Sie nach, ob eine wahre Aussage entsteht.

$$\frac{4z+3}{5} = \frac{4(4+3i)+3}{5} = \frac{16+12i+3}{5} \checkmark = \frac{19+12i}{5} = \boxed{\frac{19}{5} + \frac{12}{5}i} \checkmark$$

$$\frac{5-z}{z} = \frac{5-4-3i}{4+3i} = \frac{1-3i}{4+3i} \checkmark = \frac{(1-3i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{4-3i-12i-9}{16+9} \checkmark$$

$$= \frac{-5-15i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \checkmark$$

$$\Rightarrow z + \frac{5-z}{z} = 4+3i - \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i = \boxed{\frac{19}{5} + \frac{12}{5}i} \checkmark \Rightarrow (w)$$

(4) c) Berechnen Sie alle reellen Zahlen $a$, die von $z = 4 + 3i$ den Abstand $\sqrt{10}$ haben.

$$|z-a| = \sqrt{10} \quad ; \quad a = ?$$

$$|z-a|^2 = |4+3i-a|^2 = |(4-a)+3i|^2 \checkmark = (4-a)^2 + 9$$

$$|z-a|^2 = 10 \Rightarrow (4-a)^2 + 9 = 10 \Leftrightarrow (4-a)^2 = 1 \checkmark \quad | \pm\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow 4-a = \pm 1 \Leftrightarrow a_{1/2} = 4 \pm 1$$

$$\boxed{a_1 = 5} \checkmark ; \quad \boxed{a_2 = 3} \checkmark$$

**Aufgabe 2:** (8 Pkt)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem nach einer Methode Ihrer Wahl

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{I:} & -6x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ \text{II:} & 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 8 \\ \text{III:} & 4x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 13 \end{array}$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | -6 | -2 | 3 | 2 |
| II | 3 | 5 | 4 | 8 |
| III | 4 | 3 | -5 | 13 |
| I' = I + 2 II | 0 | 8 ✓ | 11 | 18 ✓ |
| II' = 2 I + 3 III | 0 | 5 ✓ | -9 | 43 ✓ |
| 5 I' − 8 II' | 0 | 0 | 127 | -254 ✓ |

$\Rightarrow \quad 127 x_3 = -254 \iff \boxed{x_3 = -2}$ ✓

in I': $8x_2 - 22 = 18 \iff \boxed{x_2 = 5}$ ✓

in II: $3x_1 + 25 - 8 = 8$

$3x_1 = -9 \iff \boxed{x_1 = -3}$ ✓

**Aufgabe 3:** (15 Pkt)
Gegeben sind die folgenden Matrizen und Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(9) a) Berechnen Sie

$$(A+B)\,\vec{a}, \quad A \cdot B, \quad \vec{a}^{\,T} \cdot B, \quad -\vec{a} \cdot (1,5\,\vec{a})^T \text{ und } A^{-1}$$

$$(A+B)\,\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14+68 \\ 0-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 95 \\ -2 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^{\,T} \cdot B = (-2\,;\,4)\begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = (-2\,;\,-60)$$

$$-\vec{a} \cdot (1,5\,\vec{a})^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot (-3\,;\,6) = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 12 & -24 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 1 & -(-3) \\ -(-1) & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{gem. Formel}$$

<u>oder mit Cramer'scher Formel:</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\tilde{a}_{ij})\,; \quad \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = 1$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \det(A_{21}) = -(-3) = 3$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \det(A_{12}) = -(-1) = 1$$

$$\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \det(A_{22}) = 4$$

$$\det(A) = 4 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) = 4 - 3 = 1$$

**zu Aufgabe 3:**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(6) b) Stellen Sie die Matrizengleichung

$$A(3\vec{x} - \vec{a}) = A\vec{x} + B\vec{a}$$

zunächst ohne Bezugnahme auf Zahlenwerte nach dem Vektor $\vec{x}$ um. Berechnen Sie sodann den Vektor $\vec{x}$ mit konkreten Zahlenwerten unter Verwendung von $A^{-1}$.

$$3A\vec{x} - A\vec{a} = A\vec{x} + B\vec{a} \quad \checkmark \quad | -A\vec{x} + A\vec{a}$$

$$2A\vec{x} = A\vec{a} + B\vec{a} \quad \checkmark$$

$$2A\vec{x} = (A+B)\vec{a} \quad | : 2$$

$$A\vec{x} = (A+B)\cdot\tfrac{1}{2}\vec{a} \quad | \cdot A^{-1} \text{ von links}$$

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1}(A+B)\cdot\tfrac{1}{2}\vec{a}} \quad \checkmark$$

daraus

$$A^{-1}(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \checkmark = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}} \quad \checkmark$$

**Aufgabe 4:** (23 Pkt)

(10) a) Lösen Sie unter Verwendung der Methoden "Trennung der Variablen" und "Variation der Konstanten" die Differentialgleichung

$$y' = 6\cos(3x) \cdot e^{\frac{1}{x^2}} - \frac{2y}{x^3}$$

(4) <u>homogener Fall:</u> $y' = -\frac{2y}{x^3}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x^3} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2}{x^3}\,dx$

$\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{x^2} + c \quad | \exp$

$\Rightarrow |y| = e^c e^{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \boxed{y_0 = k e^{\frac{1}{x^2}}}$ homogene Lösung

(6) <u>inhomogener Fall:</u> $k \to k(x) \Rightarrow \boxed{y = k(x) e^{\frac{1}{x^2}}}$

in Diffgl. einsetzen:

$6\cos(3x) e^{\frac{1}{x^2}} - \frac{2y}{x^3} = y' = \left(k(x) e^{\frac{1}{x^2}}\right)'$

$= k'(x) e^{\frac{1}{x^2}} + \underbrace{k(x) e^{\frac{1}{x^2}}}_{y} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)$

daraus

$6\cos(3x) \cancel{e^{\frac{1}{x^2}}} \cancel{- \frac{2y}{x^3}} = k'(x) \cancel{e^{\frac{1}{x^2}}} \cancel{- \frac{2y}{x^3}}$

$\Rightarrow k'(x) = 6\cos(3x) \quad | \int$

$\Rightarrow k(x) = 6\int \cos(3x)\,dx = 6 \cdot \frac{1}{3}\sin(3x) + c$

$\Rightarrow k(x) = 2\sin(3x) + c$

$\Rightarrow \boxed{y = (2\sin(3x) + c)\, e^{\frac{1}{x^2}}}$ mit $c \in \mathbb{R}$

allg. Lösung

**zu Aufgabe 4:**

(13) b) Lösen Sie unter Verwendung eines geeigneten partikulären Ansatzes das Anfangswertproblem

$$y'' - 5y' - 6y = 8 - 12x \qquad \text{mit} \qquad y(0) = -5,\ \ y'(0) = 39$$

(3) homogener Fall: $y'' - 5y' - 6y = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$ ✓

$\Rightarrow \lambda_1 = 6$ ; ✓ $\lambda_2 = -1 \Rightarrow \boxed{y_0 = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}}$ homogene Lösung ✓

(10) inhomogener Fall:

$g(x)$ linear $\Rightarrow y_p = ax + b \Rightarrow y_p' = a$ ; $y_p'' = 0$ ✓

$\Rightarrow y_p'' - 5y_p' - 6y_p = 8 - 12x$

$0 - 5a - 6(ax+b) = 8 - 12x$ ✓

$\Rightarrow -6ax - 5a - 6b = -12x + 8$ ✓

(6) Koeff.vgl. ergibt I $-6a = -12 \iff \boxed{a = 2}$ ✓

II $-5a - 6b = 8 \iff 6b = -18$

$\boxed{b = -3}$ ✓

$\Rightarrow y_p = 2x - 3$

$\Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x} + 2x - 3}$ ✓ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ allg. Lösung

speziell $\Rightarrow y' = 6C_1 e^{6x} - C_2 e^{-x} + 2$ ✓

I $y(0) = -5 \Rightarrow C_1 + C_2 - 3 = -5$ ✓

II $y'(0) = 39 \Rightarrow 6C_1 - C_2 + 2 = 39$

(4) I $C_1 + C_2 = -2$

II $6C_1 - C_2 = 37$

I+II $7C_1 = 35$

$\Rightarrow \boxed{C_1 = 5}$ ✓ $\overset{I}{\Rightarrow} \boxed{C_2 = -7}$ ✓

$\Rightarrow \boxed{y = 5e^{6x} - 7e^{-x} + 2x - 3}$

spezielle Lösung

**Aufgabe 5:** (26 Pkt)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + 9(1-y)^3 + 6x(y-1) + \frac{5}{3}$$

(13) a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrem- und Sattelpunkte.

(4) $f_x = x^2 + 6(y-1)$ ; $f_y = -27(1-y)^2 + 6x$

$f_{xx} = 2x$ ; $f_{yy} = 54(1-y)$ ; $f_{xy} = 6 = f_{yx}$

(3) I $x^2 + 6(y-1) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 1 - \frac{x^2}{6}}$

II $-27(1-y)^2 + 6x = 0 \overset{:(-3)}{\Longrightarrow} \boxed{9(1-y)^2 - 2x = 0}$

I in II: $9 \cdot \left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{x^4}{36} - 2x = 0$

$\frac{x^4}{4} - 2x = 0 \mid \cdot 4 \Leftrightarrow x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0$

(6) $x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow \boxed{P_1(0|1)}$

$x^3 = 8 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{P_2(2|\frac{1}{3})}$

$\Delta_f(P_1) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow \boxed{S(0|1|\frac{5}{3})}$ Sattelpunkt

$\Delta_f(P_2) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 36 \end{vmatrix} = 4 \cdot 36 - 36 = 108 > 0$

wegen $f_{xx} = 4 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum $\boxed{T(2|\frac{1}{3}|-1)}$

**zu Aufgabe 5:** $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + 9(1-y)^3 + 6x(y-1) + \frac{5}{3}$

(7) b) Die Tangentialebene $t(x,y)$ berührt den Graphen von $f$ im Punkt $B(3|a|z)$. Berechnen Sie den reellen Parameter $a < 1$ mit $f_y(3,a) = 15$ und stellen Sie dazu die Gleichung der Tagentialebene $t(x,y)$ auf.

$\boxed{f_x = x^2 + 6(y-1)}$ ; $\boxed{f_y = -27(1-y)^2 + 6x}$

(4)

$f_y(3,a) = 15 \Rightarrow -27(1-a)^2 + 18 = 15$ ✓

$\Rightarrow -27(1-a)^2 = -3 \,/ :(-27) \Rightarrow (1-a)^2 = \frac{1}{9}$ ✓ $/ \pm\sqrt{\ }$

$\Rightarrow 1-a = \pm\frac{1}{3}$ ✓ $\Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$ ✓

(3)

$\Rightarrow z = f(3;\frac{2}{3}) = 5$ ✗ ; $f_x(3;\frac{2}{3}) = 7$ ✗

$\Rightarrow t(x,y) = 7(x-3) + 15(y - \frac{2}{3}) + 5$ ✓

$= 7x - 21 + 15y - 10 + 5$

$\boxed{t(x,y) = 7x + 15y - 26}$ ✓ Tangentialebene

(6) c) Gegeben ist der in der $xy$-Ebene liegende Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $b = \sqrt{1-a^2}$. Zeigen Sie zunächst $|\vec{v}| = 1$.
Berechnen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Steigung von $f$ im Punkt $P(-1|1)$ in Richtung $\vec{v}$ (sog. Richtungsableitung) genau $a - 4,8$ beträgt.
[Verwenden Sie die Formel $f_{\vec{v}}(P) = \nabla_f(P) \cdot \vec{v}$, wobei $\nabla_f = (f_x, f_y)$]

$|\vec{v}|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (\sqrt{1-a^2})^2 = a^2 + 1 - a^2 = 1$ ✓

$f_x(P) = 1$ ✗ ; $f_y(P) = -6$ ✗

$f_{\vec{v}}(P) = a - 4,8 \Rightarrow (1; -6) \cdot \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix} = a - 4,8$ ✓

$\Rightarrow a - 6\sqrt{1-a^2} = a - 4,8$ ✓

$\Leftrightarrow -6\sqrt{1-a^2} = -4,8 \Leftrightarrow \sqrt{1-a^2} = 0,8$ ✓

$\Rightarrow 1 - a^2 = 0,64 \Leftrightarrow a^2 = 0,36 \,/ \pm\sqrt{\ }$

$\Rightarrow \boxed{a_1 = 0,6}$ ✗ ; $\boxed{a_2 = -0,6}$ ✗

**Aufgabe 6:** (14 Pkt)

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2(1-y)}$ und das Flächenstück

$$A = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{a+3} \le x \le \frac{4}{a^2},\ 1 - e^{\sqrt{x}} \le y \le 0 \right\} \text{ mit } 0 < a \le 6$$

(10) a) Stellen Sie das Volumen $V(a) = \iint_A f(x,y)\,dA$ eines zylindrischen Körpers mit $A$ als Boden und dem Graphen von $f$ als Deckel in Abhängigkeit von $a$ dar $\left[\textbf{Ergebnis: } V(a) = 2\sqrt{a+3} - a\right]$.

(6) inneres Integral:

$$\int_{1-e^{\sqrt{x}}}^{0} \frac{dy}{x^2(1-y)} = \frac{1}{x^2}\int_{1-e^{\sqrt{x}}}^{0} \frac{dy}{1-y} = -\frac{1}{x^2}\Big[\ln|1-y|\Big]_{1-e^{\sqrt{x}}}^{0}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\Big(\underbrace{\ln 1}_{0} - \underbrace{\ln e^{\sqrt{x}}}_{\sqrt{x}}\Big) = -\frac{1}{x^2}\left(-\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{\frac{1}{2}-2} = \boxed{x^{-\frac{3}{2}}}$$

(4) äußeres Integral:

$$\int_{\frac{1}{a+3}}^{4/a^2} x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_{\frac{1}{a+3}}^{\frac{4}{a^2}} = -2\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_{\frac{1}{a+3}}^{\frac{4}{a^2}}$$

$$= -2\left(\frac{a}{2} - \sqrt{a+3}\right) = \boxed{2\sqrt{a+3} - a}$$

(4) b) Berechnen Sie $a$ so, dass das Volumen $V(a) = 3$ beträgt.

$$V(a) = 3 \iff 2\sqrt{a+3} - a = 3 \iff 2\sqrt{a+3} = a+3 \quad |^2$$

$$\Rightarrow 4(a+3) = (a+3)^2 \quad | :(a+3),\ \text{da } a \ne -3$$

$$\Rightarrow 4 = a+3 \iff \boxed{a = 1}$$

$\Sigma$ 100 Pkt