Klausur Bau-Mathematik II – WS 2017/18

Aufgabe 1: (10 Pkt)

Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z = \frac{25(1-2ai)}{3+4i} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

(6) a) Bestimmen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ und $|z|$ in Abhängigkeit von a

[**Zwischenergebnis:** $z = (3-8a) - (4+6a)i$].

$$z = \frac{25(1-2ai)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{25(3-4i-6ai-8a)}{9+16} \checkmark$$

$$= \frac{\cancel{25}\left((3-8a)-(4+6a)i\right)}{\cancel{25}} \checkmark = \boxed{(3-8a)-(4+6a)i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Re}(z) = 3-8a} \checkmark ; \quad \boxed{\mathrm{Im}(z) = -(4+6a)}$$

$$|z|^2 = (3-8a)^2 + (4+6a)^2 \checkmark$$

$$= 9 - 48a + 64a^2 + 16 + 48a + 36a^2 \checkmark$$

$$= 100a^2 + 25 = 25(4a^2+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{|z| = 5\sqrt{4a^2+1}} \checkmark$$

(4) b) Berechnen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ mit $|z| = 5(3a-1)$ [**Hinweis:** Probe machen!]

$$\sqrt{4a^2+1} = 3a-1 \Rightarrow 4a^2+1 = (3a-1)^2 \checkmark$$

$$4a^2+1 = 9a^2-6a+1 \Leftrightarrow 5a^2-6a = 0 \checkmark$$

$$\Leftrightarrow a(5a-6) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 ; a_2 = 1{,}2 \checkmark$$

Probe:

$$a = 0 : \sqrt{1} = -1 \text{ (f) } ↯ \checkmark$$

$$a = 1{,}2 : \frac{13}{5} = \frac{13}{5} \text{ (w)} \Rightarrow \boxed{a = 1{,}2}$$

Aufgabe 2: (6 Pkt)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem nach einer Methode Ihrer Wahl

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{I:} & 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 31 \\ \text{II:} & -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & -25 \\ \text{III:} & 6x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 15 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 31 \\ -2 & 4 & -3 & -25 \\ 6 & 2 & 5 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[2\text{I} - \text{III}]{2\text{I} + 3\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 31 \\ 0 & 2 & -5 & -13 \\ 0 & -12 & -1 & 47 \end{array}\right) \checkmark \checkmark$$

$$\xrightarrow{6\text{II} + \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 31 \\ 0 & 2 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & -31 & -31 \end{array}\right) \checkmark$$

$$-31x_3 = -31 \iff \boxed{x_3 = 1} \checkmark$$

$$2x_2 - 5 = -13 \iff \boxed{x_2 = -4} \checkmark$$

$$3x_1 + 20 + 2 = 31 \iff \boxed{x_1 = 3} \checkmark$$

Aufgabe 3: (6 Pkt)

Gegeben ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

$$\det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -5 \\ 0 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda)^2 \checkmark$$

$$= (4-\lambda)(3+\lambda)^2$$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 4}$; $\boxed{\lambda_2 = -3}$ Eigenwerte ✓

<u>zu $\lambda = 4$</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \checkmark$$

III: $-7x_3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_3 = 0}$ ✓

II: $-7x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 0}$

wähle $\boxed{x_1 = \alpha} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Eig}(A;4) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

<u>zu $\lambda = -3$</u>

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \checkmark$$

II $\boxed{x_3 = 0}$ wähle $\boxed{x_2 = 7\alpha}$ ✓

I $7x_1 + 2x_2 = 0$

$7x_1 + 14\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = -2\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Eig}(A;-3) = \left\{ \begin{pmatrix} -2\alpha \\ 7\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 4: (18 Pkt)

(10) a) Lösen Sie unter Verwendung der Substitution $z = y - 3x + 1$ das Anfangswertproblem

$$\frac{y' - 3}{2} = \frac{\sqrt{y - 3x + 1}}{(x-1)^2} \quad \text{mit} \quad y(0) = 3$$

[**Hinweis:** Es gibt zwei spezielle Lösungen!]

Setze $z = y - 3x + 1 \Rightarrow z' = y' - 3$

$\Rightarrow \frac{z'}{2} = \frac{\sqrt{z}}{(x-1)^2} \Leftrightarrow z' = \frac{2 \cdot \sqrt{z}}{(x-1)^2}$ ✓

$\frac{dz}{dx} \overset{✓}{=} \frac{2\sqrt{z}}{(x-1)^2} \Rightarrow \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2}$ ✓

$\Rightarrow \sqrt{z} = -\frac{1}{x-1} + C$ ✓ $= \frac{1}{1-x} + C \quad |^2$

$\Rightarrow z = \left(\frac{1}{1-x} + C\right)^2 = y - 3x + 1$ ✓

$\Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{1}{1-x} + C\right)^2 + 3x - 1}$ mit $C \in \mathbb{R}$ ✓

allg. Lösung

zur speziellen Lösung:

$3 = y(0) = (1+C)^2 - 1 \overset{✓}{\Leftrightarrow} (1+C)^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{}$

$1 + C = \pm 2 \Leftrightarrow C_{1/2} = -1 \pm 2$ ✓

$\Rightarrow C_1 = 1 \; ; \; C_2 = -3$ ✓

$\Rightarrow \boxed{y_1 = \left(\frac{1}{1-x} + 1\right)^2 + 3x - 1}$ ✓ $\boxed{y_2 = \left(\frac{1}{1-x} - 3\right)^2 + 3x - 1}$

spezielle Lösungen

zu Aufgabe 4:

(8) b) Lösen Sie unter Verwendung eines geeigneten partikulären Ansatzes die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 7y' - 8y = 24x^2 + 42x - 14$$

(2) homogener Fall:

$y'' - 7y' - 8y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0$ ✓

$\lambda_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2}$ $\quad \lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow \boxed{y_0 = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-x}}$ ✓ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

homogene Lösung ✓

(6) inhomogener Fall:

$g(x)$ quadratisch $\Rightarrow y_p = ax^2 + bx + c$ (part Lsg)

$\Rightarrow y_p' = 2ax + b \; ; \; y_p'' = 2a$ ✓

in Diffgl. einsetzen:

$y_p'' - 7y_p' - 8y_p = 24x^2 + 42x - 14$

$2a - 7(2ax+b) - 8(ax^2+bx+c) = 24x^2 + 42x - 14$

$-8ax^2 - (14a+8b)x + (2a - 7b - 8c) = 24x^2 + 42x - 14$ ✓

Koeffvgl ergibt:

I $\quad -8a = 24 \Leftrightarrow \boxed{a = -3}$ ✓

II $\quad 14a + 8b = -42 \Leftrightarrow -42 + 8b = -42 \Leftrightarrow \boxed{b = 0}$ ✓

III $\quad 2a - 7b - 8c = -14 \Leftrightarrow -6 - 8c = -14 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$ ✓

$\Rightarrow \boxed{y_p = -3x^2 + 1}$ partikuläre Lsg.

$\Rightarrow y = y_0 + y_p$ allg. Lsg

$\boxed{y = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-x} - 3x^2 + 1}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ✓

Aufgabe 5: (18 Pkt)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 5x^3 + y^2 - 10xy - 4x^2 + 11x + \frac{2}{27}$$

(8) a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrem- und Sattelpunkte.

$f_x = 15x^2 - 10y - 8x + 11$; $f_{xx} = 30x - 8$ ✓

$f_y = 2y - 10x$; $f_{yy} = 2$; $f_{xy} = -10 = f_{yx}$ ✓

I $\quad 15x^2 - 10y - 8x + 11 = 0$

II $\quad 2y - 10x = 0 \iff \boxed{y = 5x}$ ✓

in I : $15x^2 - 50x - 8x + 11 = 0 \iff \boxed{15x^2 - 58x + 11 = 0}$ ✓

$$x_{1/2} = \frac{58 \pm \sqrt{58^2 - 60 \cdot 11}}{30}$$

$x_1 = \frac{11}{3} \Rightarrow y_1 = \frac{55}{3} \Rightarrow \boxed{P_1\left(\frac{11}{3} \middle| \frac{55}{3}\right)}$ ✓

$x_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow y_2 = 1 \Rightarrow \boxed{P_2\left(\frac{1}{5} \middle| 1\right)}$ ✓

$$\Delta_f(P_1) = \begin{vmatrix} 102 & -10 \\ -10 & 2 \end{vmatrix} = 204 - 100 = 104 > 0$$

da $f_{xx} = 102 > 0 \Rightarrow$ lokales Min $\boxed{T\left(\frac{11}{3} \middle| \frac{55}{3} \middle| -103\right)}$ ✓

$$\Delta_f(P_2) = \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ -10 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 100 = -104 < 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt $\boxed{S\left(\frac{1}{5} \middle| 1 \middle| \frac{779}{675}\right)}$ ✓

$\approx 1{,}15$

zu Aufgabe 5: $f(x,y) = 5x^3 + y^2 - 10xy - 4x^2 + 11x + \dfrac{2}{27}$

(3) **b) Zeigen Sie, dass f keine globalen Extrema besitzt.**

$f(x,0) = 5x^3 - 4x^2 + 11x + \frac{2}{27}$ ✓

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x,0) = \lim\limits_{x \to \infty} (5x^3) = \infty \Rightarrow$ kein glob. Max! ✓

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3) = -\infty \Rightarrow$ kein glob. Min! ✓

(7) c) Gegeben ist der in der xy-Ebene liegende Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $b = \sqrt{2a+1}$. Zeigen Sie zunächst $|\vec{v}| = a + 1$.
Berechnen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Steigung von f im Punkt $P(0|1)$ in Richtung $\vec{v}$ (sog. Richtungsableitung) genau 2 beträgt.
[Verwenden Sie die Formel $f_{\vec{v}}(P) = \dfrac{1}{|\vec{v}|} \nabla_f(P) \cdot \vec{v}$, wobei $\nabla_f = (f_x, f_y)$]

$|\vec{v}|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (\sqrt{2a+1})^2 = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$ ✓

$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(a+1)^2} = a + 1$ ✓

$f_x = 15x^2 - 10y - 8x + 11 \Rightarrow f_x(P) = 1$

$f_y = 2y - 10x \Rightarrow f_y(P) = 2$

$f_{\vec{v}}(P) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+1} \cdot (1;2) \cdot \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2a+1} \end{pmatrix} = 2$ ✓

$\Leftrightarrow \dfrac{a + 2\sqrt{2a+1}}{a+1} = 2 \quad | \cdot (a+1)$ ✓

$\Leftrightarrow a + 2\sqrt{2a+1} = 2a + 2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2a+1} = a + 2 \quad |^2$ ✓ $\Rightarrow 4(2a+1) = (a+2)^2$

$\Leftrightarrow 8a + 4 = a^2 + 4a + 4 \Leftrightarrow a^2 - 4a = 0$ ✓

$\Leftrightarrow a(a-4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0} \; ; \; \boxed{a_2 = 4}$ ✓

Aufgabe 6: (12 Pkt)

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{y^2}$ und das Flächenstück

$$A = \left\{(x|y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le x \le t,\ x \le y \le x^2\right\} \text{ mit } t \ge 1$$

(7) a) Stellen Sie das Volumen $V(t) = \iint\limits_A f(x,y)\, dA$ eines zylindrischen Körpers mit A als Boden und dem Graphen von f als Deckel in Abhängigkeit von t dar $\left[\textbf{Ergebnis: } V(t) = 2\sqrt{t} + \dfrac{2}{\sqrt{t}} - 4\right]$.

(4) inneres Integral

$$\int_x^{x^2} \frac{\sqrt{x}}{y^2}\, dy = \sqrt{x} \int_x^{x^2} \frac{dy}{y^2} = \sqrt{x}\left[-\frac{1}{y}\right]_x^{x^2} \checkmark$$

$$= \sqrt{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}} - x^{-\frac{3}{2}}} \checkmark$$

(3) äußeres Integral

$$V(t) = \int_1^t \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = \left[2\sqrt{x} - \frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^t \checkmark$$

$$= \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^t = \boxed{2\sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{t}} - 4} \checkmark$$

(5) b) Berechnen Sie t so, dass das Volumen $V(t) = 1$ beträgt.
[**Hinweis:** Verwenden Sie eine Substitution!]

Setze $\sqrt{t} = a \Rightarrow 2a + \frac{2}{a} - 4 = 1$ ✓

$\Leftrightarrow 2a + \frac{2}{a} - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{2a^2 - 5a + 2 = 0}$ ✓

$a_{1/2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow a_1 = 2$ ✓, $a_2 = 0{,}5$

$a_1 = 2 \Rightarrow \sqrt{t} = 2 \Rightarrow \boxed{t_1 = 4}$ ✓

$a_2 = 0{,}5 \Rightarrow \sqrt{t} = 0{,}5 \Rightarrow \cancel{t_2 = 0{,}25}$, da $t \ge 1$ ✓

$\boxed{\Sigma\ 70\ \text{Pkt}}$