Klausur Bau-Mathematik II - WS 2016/17

Aufgabe 1: (10 Pkt)
Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z = \frac{(5+2i)(1-3i)}{1+i} \quad \text{und} \quad w = a(3-i) + 1 - i$$

(5) a) Stellen Sie die komplexe Zahl $w - z$ in der Form $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ dar und vereinfachen Sie soweit wie möglich. [**Ergebnis:** $w - z = (3a+2) + (11-a)i$]

$$z = \frac{5-15i+2i+6}{1+i} = \frac{11-13i}{1+i} \checkmark$$

$$= \frac{(11-13i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{11-11i-13i-13}{1+1} \checkmark$$

$$= \frac{-2-24i}{2} = -1-12i \checkmark$$

$$w - z = 3a - ai + 1 - i + 1 + 12i = (3a+2) + (11-a)i \checkmark$$

(5) b) Berechnen Sie den Parameter a so, dass $|w - z| = \sqrt{5(2a+23)}$ ist. Geben Sie in diesem Fall die komplexen Zahlen w und $w - z$ in kartesischer Form an.

$$10a + 115 = |w-z|^2 = (3a+2)^2 + (11-a)^2 \checkmark$$

$$= 9a^2 + 12a + 4 + 121 - 22a + a^2 \checkmark$$

$$10a + 115 = 10a^2 - 10a + 125$$

$$\Leftrightarrow 10a^2 - 20a + 10 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \checkmark$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 1} \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{w = 4 - 2i} \; ; \; \boxed{w - z = 5 + 10i} \checkmark$$

Aufgabe 2: (17 Pkt)

Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -5 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) a) Berechnen Sie die zu $M = A + B$ inverse Matrix

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 10 & m_{12} & -13 \\ -1 & -23 & -9 \\ m_{31} & -14 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramerschen Formel $m_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ji})$ für inverse Matrizen. Ermitteln Sie dazu die in der Matrix M^{-1} fehlenden Werte.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 10 - 40 - 75 - 8 + 4 = -103$$ ✓ ✓

$$m_{12} = (-1)^{1+2} \det(M_{21}) = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(-4-20) = 24$$ ✓

$$m_{31} = (-1)^{3+1} \det(M_{13}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$$ ✓

$$\Rightarrow (A+B)^{-1} = \frac{1}{103} \begin{pmatrix} -10 & -24 & 13 \\ 1 & 23 & 9 \\ 23 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) b) Stellen Sie die Matrizengleichung

$$B\vec{x} + \vec{a} = A(2\vec{c} - \vec{x})$$

zunächst ohne Bezugnahme auf Zahlenwerte nach dem Vektor $\vec{x}$ um.

$$B\vec{x} + \vec{a} = 2A\vec{c} - A\vec{x}$$ ✓

$$A\vec{x} + B\vec{x} = 2A\vec{c} - \vec{a}$$ ✓

$$(A+B)\vec{x} = 2A\vec{c} - \vec{a}$$ ✓

$$\boxed{\vec{x} = (A+B)^{-1}(2A\vec{c} - \vec{a})}$$ ✓

zu Aufgabe 2: Seien nun $\vec{a} = \begin{pmatrix} -23 \\ 25 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(9) c) Die Matrizengleichung aus b) ist äquivalent zu einer Gleichung der Form $M\vec{x} = \vec{b}$. Berechnen Sie zunächst die 3x3-Matrix M und den 3x1-Vektor $\vec{b}$ unter Verwendung konkreter Zahlenwerte. [**Hinweis:** $\vec{b} = 2A\vec{c} - \vec{a}$]

Lösen Sie sodann das nachfolgende zu $M\vec{x} = \vec{b}$ äquivalente Gleichungssystem nach einer Methode Ihrer Wahl nach $\vec{x}$ auf:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{I:} & x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 23 \\ \text{II:} & -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -23 \\ \text{III:} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$M = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$2A\vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \checkmark - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -23 \\ 25 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -23 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

<u>zur Lösung des LGS':</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 23 \\ -2 & 3 & -1 & -23 \\ 5 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[5\mathrm{I} - \mathrm{III}]{2\mathrm{I} + \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 23 \\ 0 & -1 & 9 & 23 \\ 0 & -14 & 23 & 116 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array}$$

$$\xrightarrow{-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 23 \\ 0 & 1 & -9 & -23 \\ 0 & -14 & 23 & 116 \end{array}\right) \xrightarrow{14\mathrm{II} + \mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 23 \\ 0 & 1 & -9 & -23 \\ 0 & 0 & -103 & -206 \end{array}\right) \checkmark$$

$\Rightarrow$ III $\quad -103x_3 = -206 \iff x_3 = 2$ ✓

II $\quad x_2 - 18 = -23 \iff x_2 = -5$ ✓ $\Rightarrow \boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}$

I $\quad x_1 + 10 + 10 = 23 \iff x_1 = 3$ ✓

<u>Alternativ mit inverser Matrix:</u>

$$\vec{x} = (A+B)^{-1}\vec{b} = \frac{1}{103}\begin{pmatrix} -10 & -24 & 13 \\ 1 & 23 & 9 \\ 23 & 14 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ -23 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{103}\begin{pmatrix} 309 \\ -515 \\ 206 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: (20 Pkt)

(12) a) Lösen Sie unter Verwendung der Methoden "Trennung der Variablen" und "Variation der Konstanten" das Anfangswertproblem

$$y' + y\sin x = \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{2x}} \qquad \text{mit} \qquad y(\pi) = \frac{1}{e}$$

(3) homogener Fall:

$$y' + y\sin x = 0 \iff y' = -y\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = -y\sin x \iff \int \frac{dy}{y} = -\int \sin x \, dx \checkmark$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \cos x + C \checkmark \Rightarrow y_0 = K e^{\cos x} \checkmark ; K \in \mathbb{R}$$

(6) Variation der Konstanten: $y = K(x)e^{\cos x}$

$$\frac{e^{\cos x}}{\sqrt{2x}} - y\sin x = y' = K'(x)e^{\cos x} \checkmark - \underbrace{K(x)\sin x \cdot e^{\cos x}}_{y\sin x} \checkmark$$

$$\Rightarrow K'(x)e^{\cos x} = \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{2x}} \checkmark \iff K'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \checkmark$$

$$\Rightarrow K(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \int (2x)^{-\frac{1}{2}} dx \checkmark = \cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)} \cdot \frac{(2x)^{1/2}}{\cancel{1/2}} = \sqrt{2x} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y = (\sqrt{2x} + C)e^{\cos x}} \checkmark \text{ allg. Lösung mit } C \in \mathbb{R}$$

(3) mit Anfangsbedingung

$$\frac{1}{e} = y(\pi) = (\sqrt{2\pi} + C)e^{\cos\pi} \checkmark = (\sqrt{2\pi} + C) \cdot e^{-1} \checkmark \quad | \cdot e$$

$$1 = \sqrt{2\pi} + C \iff C = 1 - \sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \left(\sqrt{2x} + 1 - \sqrt{2\pi}\right)e^{\cos x}} \checkmark \text{ spezielle Lösung}$$

zu Aufgabe 3:

(8) b) Lösen Sie unter Verwendung eines geeigneten partikulären Ansatzes die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + 14y' + 49y = 110 - 49x^2 + 21x$$

(2) homogener Fall:

$$y'' + 14y' + 49y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 14\lambda + 49 = 0$$

$$(\lambda+7)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -7 \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0 = (c_1 + c_2 x)e^{-7x}} \checkmark$$

(6) inhomogener Fall:

$$y_p = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_p' = 2ax + b \Rightarrow y_p'' = 2a \checkmark$$

in DLtGl. einsetzen: $y_p'' + 14y_p' + 49y_p = -49x^2 + 21x + 110$

$$2a + 14(2ax+b) + 49(ax^2+bx+c) = -49x^2 + 21x + 110$$

$$49ax^2 + (28a + 49b)x + (2a + 14b + 49c) = -49x^2 + 21x + 110 \checkmark$$

I $\quad 49a = -49 \Leftrightarrow \boxed{a = -1} \checkmark$

II $\quad 28a + 49b = 21 \Leftrightarrow b = \frac{1}{49}(21+28) \Rightarrow \boxed{b = 1} \checkmark$

III $\quad 2a + 14b + 49c = 110 \Leftrightarrow c = \frac{1}{49}(110 - 2a - 14b) = \frac{98}{49}$

$\Rightarrow \boxed{c = 2} \checkmark$

$$\Rightarrow y_p = -x^2 + x + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = (c_1 + c_2 x)e^{-7x} - x^2 + x + 2} \checkmark$$

allg. Lösung $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4: (20 Pkt)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + (2-y)^3 - 15xy + 30x - 25$$

(10) a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrem- und Sattelpunkte.

$f_x = 3x^2 - 15y + 30 \quad ; \quad f_{xx} = 6x$

$f_y = -3(2-y)^2 - 15x \quad ; \quad f_{yy} = 6(2-y)$

$f_{xy} = -15 = f_{yx}$

$\text{I} \quad 3x^2 - 15y + 30 = 0 \iff x^2 - 5y + 10 = 0$

$\text{II} \quad -3(2-y)^2 - 15x = 0 \iff (2-y)^2 + 5x = 0$

$\text{I} \iff y = \frac{x^2}{5} + 2$

in II: $\left(-\frac{x^2}{5}\right)^2 + 5x = 0 \iff \frac{x^4}{25} + 5x = 0 \quad | \cdot 25$

$x^4 + 125x = 0 \iff x(x^3 + 125) = 0$

$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 2 \Rightarrow P_1(0|2)$

$x_2 = -5 \Rightarrow y_2 = 7 \Rightarrow P_2(-5|7)$

$\Delta_f(P_1) = \begin{vmatrix} 0 & -15 \\ -15 & 0 \end{vmatrix} = -225 < 0$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt $\boxed{S(0|2|-25)}$

$\Delta_f(P_2) = \begin{vmatrix} -30 & -15 \\ -15 & -30 \end{vmatrix} = 900 - 225 = 675 > 0$

wegen $f_{xx} = -30 < 0 \Rightarrow$ lokales Max $\boxed{H(-5|7|100)}$

a) $\Rightarrow f_x = 3x^2 - 15y + 30$; $f_y = -3(2-y)^2 - 15x$

zu Aufgabe 4: $f(x,y) = x^3 + (2-y)^3 - 15xy + 30x - 25$

(5) b) Die Tangentialebene $t(x,y)$ berührt den Graphen von f im Punkt $B(a|2|39)$. Ermitteln Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ und stellen Sie die Gleichung der Tagentialebene $t(x,y)$ auf.

$$39 = f(a|2) = a^3 - 30a + 30a - 25 = a^3 - 25 \checkmark$$

$$\Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow \boxed{a = 4} \checkmark \Rightarrow \boxed{B(4|2|39)}$$

$$f_x(a|2) = 3a^2 - 30 + 30 = 3a^2 \Rightarrow f_x(4|2) = 48 \checkmark$$

$$f_y(a|2) = -3\underbrace{(2-2)^2}_{=0} - 15a = -15a \Rightarrow f_y(4|2) = -60 \checkmark$$

$$\Rightarrow t(x,y) = 48(x-4) - 60(y-2) + 39$$

$$\boxed{t(x,y) = 48x - 60y - 33} \checkmark \text{ Tangentialebene}$$

(5) c) Gegeben ist der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ in der xy-Ebene. Berechnen Sie den reellen Parameter a so, dass die Steigung von f im Punkt $P(a|2)$ in Richtung $\vec{v}$ (sog. Richtungsableitung) genau 31,2 beträgt.

$$f_{\vec{v}}(P) = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \nabla_f(P) \cdot \vec{v} = 31{,}2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \quad ; \quad \nabla_f(P) = (3a^2, -15a) \text{ siehe b)}$$

$$\frac{1}{5}(3a^2, -15a)\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 31{,}2 \checkmark$$

$$\frac{1}{5}(9a^2 + 60a) = 31{,}2 \Leftrightarrow 9a^2 + 60a = 156 \checkmark$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 + 60a - 156 = 0 \quad |:3$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 20a - 52 = 0 \checkmark$$

$$a_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 12 \cdot 52}}{6} \Rightarrow \boxed{a_1 = 2} \checkmark$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{26}{3}} = -8\tfrac{2}{3} \checkmark$$

Aufgabe 5: (13 Pkt)

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-xy}$ und das Flächenstück

$$A = \left\{ (x|y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1 \le x \le a \text{ und } \frac{1-e^{\sqrt{x}}}{x} \le y \le \frac{e-1}{xe} \right\} \text{ mit } a > 1$$

(8) a) Stellen Sie das Volumen $V(a) = \iint\limits_A f(x,y)\,dA$ eines zylindrischen Körpers mit A als Boden und dem Graphen von f als Deckel in Abhängigkeit von $a \in \boldsymbol{R}$ dar. [**Ergebnis:** $V(a) = a - 3 + \sqrt{4a}$]

Sei $\alpha(x) = \dfrac{1-e^{\sqrt{x}}}{x}$; $\beta(x) = \dfrac{e-1}{xe}$.

(6) Inneres Integral:

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\sqrt{x}}{1-xy}\,dy = \sqrt{x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{dy}{1-xy} = \sqrt{x}\left[-\frac{1}{x}\ln|1-xy|\right]_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \checkmark$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\ln|1-xy|\right]_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \checkmark = -\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\ln\left(1-\frac{e-1}{e}\right) - \ln\left(e^{\sqrt{x}}\right)\right) \checkmark$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\ln\left(1-1+\frac{1}{e}\right) - \sqrt{x}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \sqrt{x}\right) \checkmark$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}}\left(-1-\sqrt{x}\right) \checkmark = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \checkmark$$

(2) äußeres Integral:

$$V(a) = \int_1^a \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)dx = \left[2\sqrt{x} + x\right]_1^a \checkmark$$

$$= 2\sqrt{a} + a - 2\sqrt{1} - 1 = \boxed{2\sqrt{a} + a - 3} \checkmark$$

(5) b) Berechnen Sie a so, dass das Volumen $V(a) = 5$ beträgt (Probe durchführen!).

$$V(a) = 5 \iff a - 3 + \sqrt{4a} = 5$$

$$\iff \sqrt{4a} = 8 - a \quad |^2$$

$$\iff 4a = (8-a)^2 \checkmark = 64 - 16a + a^2$$

$$\iff a^2 - 20a + 64 = 0 \checkmark$$

$$a_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-256}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} \Rightarrow \cancel{a_1 = 16}, \quad \boxed{a_2 = 4} \checkmark$$

Probe:

$4 - 3 + \sqrt{16} = 5$ ✓	$16 - 3 + \sqrt{4 \cdot 16} = 5$
$1 + 4 = 5$ (w)	$13 + 8 = 5$ (f) ✓
$\Rightarrow a = 4$	$\Rightarrow a = 16$ unzulässig

Σ 80 Pkt