Klausur Bau-Mathematik II – WS 2015/16

Aufgabe 1: (10 Pkt)

Gegeben sind die komplexen Zahlen $v = \dfrac{10i}{3+i}$ und $w = \dfrac{i}{a-2i}$

(6) a) Berechnen Sie

$$z = \frac{v}{w} \quad \text{und} \quad r = |z|$$

Stellen Sie dabei die komplexe Zahl z in der Form $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ dar und vereinfachen Sie soweit wie möglich. [**Ergebnis:** $z = (3a-2) - (a+6)i$]

$$z = \frac{v}{w} = \frac{10i}{3+i} \cdot \frac{a-2i}{i} = \frac{10(a-2i)}{3+i} \checkmark$$

$$= \frac{10(a-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \checkmark = \frac{10(3a-ai-6i+2i^2)}{9+1} \checkmark$$

$$= \frac{\cancel{10}(3a-(a+6)i-2)}{\cancel{10}} = \boxed{(3a-2)-(a+6)i} \checkmark$$

$$|z| = \sqrt{(3a-2)^2+(a+6)^2}$$

$$= \sqrt{9a^2 - \cancel{12a} + 4 + a^2 + \cancel{12a} + 36} \checkmark$$

$$\boxed{|z| = \sqrt{10a^2+40}} \checkmark$$

(4) b) Berechnen Sie den Parameter a so, dass $|z| = 20$ ist. Geben Sie in diesem Fall die komplexen Zahlen z in kartesischer Form an.

$$|z| = 20 \iff \sqrt{10a^2+40} = 20$$

$$\iff 10a^2 + 40 = 400 \checkmark$$

$$\iff 10a^2 = 360$$

$$\iff a^2 = 36 \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = 6} \; ; \; \boxed{a_2 = -6} \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = 16-12i} \; ; \; \boxed{z_2 = -20} \checkmark$$

Aufgabe 2: (5 Pkt)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem nach einer Methode Ihrer Wahl

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I:} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ \text{II:} & -4x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 28 \\ \text{III:} & 3x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -8 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 7 & 28 \\ 3 & 5 & -2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[3\mathrm{I} - 2\mathrm{III}]{2\mathrm{I} + \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 15 & 26 \\ 0 & -19 & 16 & 13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{19\mathrm{II} - 4\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 15 & 26 \\ 0 & 0 & 221 & 442 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{III} \quad 221x_3 = 442 \iff \boxed{x_3 = 2}$$

$$\mathrm{II} \quad -4x_2 + 30 = 26 \iff -4x_2 = -4 \iff \boxed{x_2 = 1}$$

$$\mathrm{I} \quad 2x_1 - 3 + 8 = -1 \iff 2x_1 = -6 \iff \boxed{x_1 = -3}$$

Aufgabe 3: (8 Pkt)
Gegeben ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

$$\det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = 1} \; ; \; \boxed{\lambda_2 = 2} \; ; \; \boxed{\lambda_3 = 3}$$

<u>zu $\lambda = 1$</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

II $x_2 + 4x_3 = 0$

setze $\boxed{x_3 = 2\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = -8\alpha}$

in I $2x_1 - 40\alpha - 2\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 21\alpha}$

$$\Rightarrow Eig(A; 1) = \left\{ \begin{pmatrix} 21\alpha \\ -8\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>zu $\lambda = 2$</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

II, III $\Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$; setze $\boxed{x_2 = \alpha}$

I: $x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -5\alpha}$

$$\Rightarrow Eig(A; 2) = \left\{ \begin{pmatrix} -5\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>zu $\lambda = 3$</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

III $\Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$

II $\Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

setze $\boxed{x_1 = \alpha}$

$$\Rightarrow Eig(A; 3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 4: (16 Pkt)

(10) a) Lösen Sie unter Verwendung einer geeigneten Substitution das Anfangswertproblem

$$y' - x\cos x \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x} \qquad \text{mit} \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9\pi}{8}$$

[**Hinweis:** Es gibt zwei spezielle Lösungen!]

Sei $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$ ✓

daraus

$$z'x + \cancel{z} - x\cos x \cdot \sqrt{z} = \cancel{z} \quad ✓$$

$$z'x = x\cos x \cdot \sqrt{z} \Rightarrow z' = \cos x \cdot \sqrt{z} \quad ✓$$

$$\frac{dz}{dx} = \cos x \cdot \sqrt{z} \iff \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int \cos x \, dx \quad ✓$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{z} = \sin x + C \Rightarrow \sqrt{z} = \frac{\sin x + C}{2} \quad ✓$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = z = \left(\frac{\sin x + C}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{y = x\left(\frac{\sin x + C}{2}\right)^2} \quad ✓$$

allg. Lösung mit $C \in \mathbb{R}$

spezielle Lösungen:

$$\frac{9\pi}{8} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2} + C}{2}\right)^2 \iff \frac{9}{4} = \left(\frac{1 + C}{2}\right)^2 ✓ \quad \Big| \pm\sqrt{\ }$$

$$\frac{1+C}{2} = \pm\frac{3}{2} \iff 1 + C = \pm 3 \iff \begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = -4 \end{array} \quad ✓$$

daraus ✓

$$\boxed{y_1 = x\left(\frac{\sin x + 2}{2}\right)^2} \; ; \; \boxed{y_2 = x\left(\frac{\sin x - 4}{2}\right)^2} \quad ✓$$

spezielle Lösungen

zu Aufgabe 4:

(6) b) Lösen Sie unter Verwendung eines geeigneten partikulären Ansatzes die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + 5y' - 6y = 18x^2 - 37$$

(2) homogener Fall:

$$y'' + 5y' - 6y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -6 \end{array}$$

$$\Rightarrow y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-6x} \; ; \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

homogene Lösung

inhomogener Fall:

$$y_p = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_p' = 2ax + b \Rightarrow y_p'' = 2a$$

in Dgl.gleichung einsetzen: $y_p'' + 5y_p' - 6y_p = 18x^2 - 37$

$$2a + 5(2ax+b) - 6(ax^2+bx+c) = 18x^2 - 37$$

$$-6ax^2 + (10a - 6b)x + (2a + 5b - 6c) = 18x^2 - 37$$

$$\text{I} \quad -6a = 18 \Leftrightarrow \boxed{a = -3}$$

$$\text{II} \quad 10a - 6b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{10a}{6} \Rightarrow \boxed{b = -5}$$

$$\text{III} \quad 2a + 5b - 6c = -37 \Leftrightarrow c = \frac{1}{6}(2a + 5b + 37)$$

$$= \frac{1}{6}(-6 - 25 + 37) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$\Rightarrow y_p = -3x^2 - 5x + 1$$

$$\Rightarrow y = y_0 + y_p$$

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-6x} - 3x^2 - 5x + 1}$$

allg. Lösung mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5: (16 Pkt)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 4x^3 + 6xy + \frac{5x^2}{2} - y^2 - 2x + 4$$

(8) a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrem- und Sattelpunkte.

$f_x = 12x^2 + 6y + 5x - 2 \quad ; \quad f_y = 6x - 2y$ ✓

$f_{xx} = 24x + 5 \quad ; \quad f_{yy} = -2$ ✓

$f_{xy} = 6 = f_{yx}$

I $\quad 12x^2 + 6y + 5x - 2 = 0$

II $\quad 6x - 2y = 0 \iff \boxed{y = 3x}$ ✓

in I $\quad 12x^2 + 18x + 5x - 2 = 0 \iff 12x^2 + 23x - 2 = 0$ ✓

$$x_{1/2} = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 + 48 \cdot 2}}{24} = \frac{-23 \pm 25}{24}$$

$x_1 = \frac{1}{12} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{P_1\left(\frac{1}{12} \middle| \frac{1}{4}\right)}$ ✓

$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -6 \Rightarrow \boxed{P_2(-2|-6)}$ ✓

$$\Delta_f(P_1) = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -14 - 36 = -50 < 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt $\boxed{S\left(\frac{1}{12} \middle| \frac{1}{4} \middle| 3{,}92\right)}$ ✓

$$\Delta_f(P_2) = \begin{vmatrix} -43 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 84 - 36 = 48 > 0$$

wegen $f_{xx} = -43 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum ✓

$\boxed{H(-2|-6|22)}$

zu Aufgabe 5: $f(x,y) = 4x^3 + 6xy + \frac{5x^2}{2} - y^2 - 2x + 4$

(3) b) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $P(0|1)$ an.

$f_x(P) = 6 - 2 = 4$; $f_y(P) = -2$; $f(P) = -1 + 4 = 3$

$t(x,y) = f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) + f(P)$

$= 4(x - 0) - 2(y - 1) + 3$

$\boxed{t(x,y) = 4x - 2y + 5}$

Tangentialebene

(5) c) Gegeben ist der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$ in der xy-Ebene.
Berechnen Sie den reellen Parameter a so, dass die Steigung von f im Punkt $P(0|1)$ in Richtung $\vec{v}$ (sog. Richtungsableitung) genau $\sqrt{20}$ beträgt.

$|\vec{v}| = \sqrt{a^2+1}$; $f_{\vec{v}}(P) = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \nabla f(P) \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \cdot (4; -2) \circ \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{20}$

$\frac{4a+2}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{20} \Rightarrow \frac{(4a+2)^2}{a^2+1} = 20$

$16a^2 + 16a + 4 = 20a^2 + 20$

$4a^2 - 16a + 16 = 0 \,/ : 4$

$a^2 - 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{a = 2}$

Aufgabe 6: (10 Pkt)

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{y}}$ und das Flächenstück

$$A = \left\{(x|y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \ln 2 \le x \le t,\ e^{-2x} \le y \le 1\right\} \quad \text{mit} \quad t > 0$$

(5) a) Stellen Sie das Volumen $V(t) = \iint\limits_A f(x,y)\,dA$ eines zylindrischen Körpers mit A als Boden und dem Graphen von f als Deckel in Abhängigkeit von t dar [**Ergebnis:** $V(t) = e^t(e^t - 2)$].

inneres Integral:

$$\int_{e^{-2x}}^{1} \frac{e^{2x}}{\sqrt{y}}\,dy = e^{2x}\int_{e^{-2x}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2e^{2x}\left[\sqrt{y}\right]_{e^{-2x}}^{1}$$

$$= 2e^{2x}(1 - e^{-x}) = 2e^{2x} - 2e^{x}$$

äußeres Integral:

$$V(t) = \int_{\ln 2}^{t} (2e^{2x} - 2e^{x})\,dx = \left[e^{2x} - 2e^{x}\right]_{\ln 2}^{t}$$

$$= e^{2t} - 2e^{t} = \boxed{e^t(e^t - 2)}$$

(5) b) Berechnen Sie t so, dass das Volumen $V(t) = 80$ beträgt.
[**Hinweis:** Verwenden Sie eine geeignete Substitution!]

Substituieren $a = e^t \Rightarrow a(a-2) = 80$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a = 80 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 80 = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2} \Rightarrow a_1 = 10$$

~~$a_2 = -8 < 0$~~

$$\Rightarrow e^t = 10 \Leftrightarrow \boxed{t = \ln 10}$$

Σ 65 Pkt