Klausur Bau-Mathematik II – WS 2014/15

Aufgabe 1: (10 Pkt)

(4) a) Ermitteln Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z - \frac{1}{z} = \frac{14z - 6}{z(6-z)} \quad \Big| \cdot z(6-z)$$

$$z^2(6-z) - (6-z) = 14z - 6$$

$$6z^2 - z^3 - \cancel{6} + z = 14z - \cancel{6}$$

$$z^3 - 6z^2 + 13z = 0 \iff z(z^2 - 6z + 13) = 0$$

$$\text{da } z \neq 0 \Rightarrow z^2 - 6z + 13 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

$$\boxed{z_1 = 3 + 2i}, \quad \boxed{z_2 = 3 - 2i}$$

(6) b) Eine Lösung der obigen Gleichung lautet $z = 3 - 2i$. Setzen Sie diese Lösung in die Bruchgleichung aus a) ein und rechnen Sie nach, ob eine wahre Aussage entsteht.

$$z - \frac{1}{z} = 3-2i - \frac{1}{3-2i} = 3-2i - \frac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)}$$

$$= 3-2i - \frac{3+2i}{9+4} = 3-2i - \frac{3+2i}{13}$$

$$= 3-2i - \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i = \frac{36}{13} - \frac{28}{13}i$$

$$\frac{14z-6}{z(6-z)} = \frac{14(3-2i)-6}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{42-28i-6}{9+4}$$

$$= \frac{36-28i}{13}$$

Aufgabe 2: (8 Pkt)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Berechnen Sie die Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass der Graph von f die y-Achse bei $y = -3$ schneidet und durch die Punkte $P_1(1|1,5)$ sowie $P_2(-2|-39)$ verläuft. Ferner sei die Ableitung $f'(-1) = 14$.

$f(0) = -3 \Rightarrow d = -3$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

I $f(1) = 1,5 \Rightarrow a + b + c = 4,5$

II $f(-2) = -39 \Rightarrow -8a + 4b - 2c = -36$ $\mid :(-2)$

III $f'(-1) = 14 \Rightarrow 3a - 2b + c = 14$

I $a + b + c = 4,5$

II $4a - 2b + c = 18$

III $3a - 2b + c = 14$

II − III: $\boxed{a = 4}$

II − I $3a - 3b = 13,5 \Rightarrow b = \frac{1}{3}(3a - 13,5)$

$\boxed{b = -0,5}$

in I $4 - 0,5 + c = 4,5 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = 4x^3 - 0,5x^2 + x - 3}$

Aufgabe 3: (10 Pkt)

Gegeben ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & a_{13} \\ 0 & -3 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

(5) a) Berechnen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1} mit Hilfe der Cramerschen Formel $a_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})$ für inverse Matrizen. Ermitteln Sie dazu die in der Matrix A^{-1} fehlenden Werte.

$$\det(A) = 1\cdot(-1)\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot(-1)\cdot 2 - 0\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 0$$
$$= -1 + 4 = 3$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1}\det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3}\det(A_{31}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3}\det(A_{32}) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3}\det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

(2) b) Stellen Sie die Matrizengleichung

$$\vec{a} + A\vec{x} = A(\vec{b} - \vec{x})$$

zunächst ohne Bezugnahme auf Zahlenwerte nach dem Vektor $\vec{x}$ um.

$$\vec{a} + A\vec{x} = A\vec{b} - A\vec{x} \iff 2A\vec{x} = A\vec{b} - \vec{a} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

$$\iff A\vec{x} = \frac{1}{2}(A\vec{b} - \vec{a}) \quad \Big| \cdot A^{-1} \text{ von links}$$

$$\iff \boxed{\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{b} - A^{-1}\vec{a})}$$

zu Aufgabe 3: Seien nun $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(3) c) Berechnen Sie

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - A^{-1}\vec{a}\right)$$

mit konkreten Zahlenwerten unter Verwendung von A^{-1} aus a).

$$A^{-1}\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = 4$; $x_2 = -5$; $x_3 = 1$

Aufgabe 4: (18 Pkt)

(8) a) Lösen Sie unter Verwendung der Substitution $z = 3x - y$ das Anfangswertproblem

$$\frac{y' - 3}{\pi} = (3x - y)^2 \cos(\pi x) \qquad \text{mit} \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

$z = 3x - y \Rightarrow z' = 3 - y' \Leftrightarrow -z' = y' - 3$ ✓

$\Rightarrow \frac{-z'}{\pi} = z^2 \cos(\pi x) \Leftrightarrow -z' = z^2 \pi \cos(\pi x)$ ✓

$-\frac{dz}{dx} = z^2 \pi \cos(\pi x) \Leftrightarrow -\int \frac{dz}{z^2} = \int \pi \cos(\pi x)\, dx$ ✓

$\Rightarrow \frac{1}{z} = \sin(\pi x) + C$ ✓, $C \in \mathbb{R}$

$3x - y = z = \frac{1}{\sin(\pi x) + C}$ ✓

$\Leftrightarrow \boxed{y = 3x - \frac{1}{\sin(\pi x) + C}}$ allgemeine Lösung ✓

$\frac{5}{4} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1 + C}$ ✓

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+C} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 + C = 4 \Leftrightarrow C = 3$ ✓

$\Rightarrow \boxed{y = 3x - \frac{1}{\sin(\pi x) + 3}}$ spezielle Lösung

zu Aufgabe 4:

(10) b) Lösen Sie unter Verwendung eines geeigneten partikulären Ansatzes das Anfangswertproblem 2. Ordnung

$$y'' - 2y' - 15y = 30x - 41 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 12, \quad y'(0) = 51$$

homogener Fall: $y'' - 2y' - 15y = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$ ✓ $\Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2}$

$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm 8}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 5 \; ; \; \lambda_2 = -3$

$\Rightarrow \boxed{y_0 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-3x}}$ homogene Lösung ✓

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

inhomogener Fall: $g(x) = 30x - 41$ (lineare Funktion)

partikuläre Lsg: $y_p = ax + b \Rightarrow y_p' = a \; ; \; y_p'' = 0$ ✓

in Dgl. eingesetzt: $y_p'' - 2y_p' - 15y_p = 30x - 41$

$\Rightarrow -2a - 15(ax+b) = 30x - 41$ ✓

$-15ax - 2a - 15b = 30x - 41$

I $\quad -15a = 30 \Leftrightarrow a = -2$ ✓

II $\quad -2a - 15b = -41 \Leftrightarrow b = \frac{1}{15}(41 - 2a) = 3$ ✓

$\Rightarrow y_p = -2x + 3 \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-3x} - 2x + 3}$ allg. Lsg ✓

$y' = 5C_1 e^{5x} - 3C_2 e^{-3x} - 2$

$y(0) = 12 \Rightarrow$ I: $C_1 + C_2 = 9$ ✓

$y'(0) = 51 \Rightarrow$ II: $5C_1 - 3C_2 = 53$

$3\text{I} + \text{II} \quad 8C_1 = 80 \Leftrightarrow C_1 = 10$ ✓

I $\Rightarrow C_2 = -1$

$\Rightarrow \boxed{y = 10e^{5x} - e^{-3x} - 2x + 3}$ spezielle Lösung ✓

Aufgabe 5: (14 Pkt)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \frac{4x^3}{3} + 12xy - 3y^2 - 16x - 6y + \frac{1}{3}$$

(8) a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrem- und Sattelpunkte.

$f_x = 4x^2 + 12y - 16$; $f_y = 12x - 6y - 6$

$f_{xx} = 8x$ $\qquad f_{yy} = -6$

$f_{xy} = 12 = f_{yx}$

$\mathrm{I}\quad 4x^2 + 12y - 16 = 0 \quad | \quad \mathrm{I}' \quad x^2 + 3y - 4 = 0$

$\mathrm{II}\quad 12x - 6y - 6 = 0 \quad | \quad \mathrm{II}' \quad 2x - y - 1 = 0$

$\mathrm{II}' \Rightarrow y = 2x - 1$

in I': $x^2 + 3(2x-1) - 4 = 0$

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$

$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow P_1(1/1)$

$x_2 = -7 \Rightarrow y_2 = -15 \Rightarrow P_2(-7/-15)$

$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_f(P_1) = -48 - 144 < 0$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt $\boxed{S(1/1/-\frac{34}{3})}$ $f(1/1) = -\frac{34}{3}$

$Hf(P_2) = \begin{pmatrix} -56 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_f(P_2) = 56 \cdot 6 - 144 > 0$

da $f_{xx} = -56 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $\boxed{H(-7/-15/330)}$

$f(-7/-15) = 330$

$f_x = 4x^2 + 12y - 16$

$f_y = 12x - 6y - 6$

zu Aufgabe 5: $f(x,y) = \frac{4x^3}{3} + 12xy - 3y^2 - 16x - 6y + \frac{1}{3}$

(2) b) Zeigen Sie, dass f keine globalen Extrema besitzt.

$$f(x,0) = \frac{4x^3}{3} - 16x + \frac{1}{3} = x\left(\frac{4x^2}{3} - 16\right) + \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x,0) = \infty \cdot \infty + \frac{1}{3} = \infty \checkmark$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty \cdot \infty + \frac{1}{3} = -\infty \checkmark$$

$\Rightarrow$ Keine globalen Extrema!

(4) c) Gegeben ist der in der xy-Ebene liegende Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $b = \sqrt{1-a^2}$. Zeigen Sie zunächst $|\vec{v}| = 1$.
Berechnen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Steigung von f im Punkt $P(-1|1)$ in Richtung $\vec{v}$ (sog. Richtungsableitung) genau $-19,2$ beträgt.
[Verwenden Sie die vereinfachte Formel $f_{\vec{v}}(P) = \nabla_f(P) \cdot \vec{v}$]

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 1 - a^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_x(P) &= 4 + 12 - 16 = 0 \\ f_y(P) &= -12 - 6 - 6 = -24 \end{aligned}}$$

$$\nabla_f(P) \cdot \vec{v} = -19,2$$

$$(0; -24) \circ \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix} = -19,2 \checkmark$$

$$-24\sqrt{1-a^2} = -19,2 \Leftrightarrow \sqrt{1-a^2} = \frac{4}{5} \checkmark \quad |^2$$

$$\Rightarrow 1 - a^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow a^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad |\pm\sqrt{} \checkmark$$

$$\boxed{a_1 = 0,6} \; ; \; \boxed{a_2 = -0,6} \checkmark$$

Aufgabe 6: (10 Pkt)

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-y)^2}$ und das Flächenstück

$$A = \left\{(x|y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a+1 \leq x \leq a^2,\ 2x \leq y \leq 3x\right\} \quad \text{mit} \quad a > 0$$

(6) a) Stellen Sie das Volumen $V(a) = \iint\limits_A f(x,y)\, dA$ eines zylindrischen Körpers mit A als Boden und dem Graphen von f als Deckel in Abhängigkeit von a dar [**Ergebnis:** $V(a) = a - \sqrt{a+1}$].

$$V(a) = \int_{a+1}^{a^2}\int_{2x}^{3x} \frac{\sqrt{x}}{(x-y)^2}\, dy\, dx$$

(4) <u>inneres Integral:</u>

$$\int_{2x}^{3x} \frac{\sqrt{x}}{(x-y)^2}\, dy = \sqrt{x} \int_{2x}^{3x} \frac{dy}{(x-y)^2} = \sqrt{x}\left[\frac{1}{x-y}\right]_{2x}^{3x}$$

$$= \sqrt{x}\left(\frac{1}{-2x} - \frac{1}{-x}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2) <u>äußeres Integral:</u>

$$V(a) = \int_{a+1}^{a^2} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x}\right]_{a+1}^{a^2} = \sqrt{a^2} - \sqrt{a+1}$$

$$= a - \sqrt{a+1}$$

(4) b) Berechnen Sie a so, dass das Volumen $V(a) = 1$ beträgt.

$$a - \sqrt{a+1} = 1 \iff \sqrt{a+1} = a-1 \quad /^2$$

$$\Rightarrow a+1 = (a-1)^2 \iff a+1 = a^2 - 2a + 1$$

$$\iff a^2 - 3a = 0 \iff a(a-3) = 0$$

da $a \neq 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$