Klausur Bau-Mathe II WS 2012/13

Aufgabe 1: (10Pkt)
Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z = \frac{a-i}{1-i} \quad \text{und} \quad w = \frac{i-a}{i} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

(6) a) Stellen Sie die komplexe Zahl $z - w$ in der Form $z - w = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar. $\left[\textbf{Zwischenergebnis: } z - w = \frac{a-i}{1+i}\right]$

$$z-w = \frac{a-i}{1-i} - \frac{i-a}{i} = \frac{(a-i)i - (i-a)(1-i)}{i(1-i)} \checkmark$$

$$= \frac{\cancel{ai} - \cancel{i^2} - i + \cancel{i^2} + a - \cancel{ai}}{i - i^2} \checkmark = \frac{a-i}{1+i}$$

$$= \frac{(a-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \checkmark = \frac{a - ai - i + i^2}{1 - i^2} \checkmark$$

$$= \frac{(a-1) - (a+1)i}{2} \checkmark = \boxed{\frac{a-1}{2} - \frac{a+1}{2} \cdot i} \checkmark$$

(4) b) Berechnen Sie den reellen Parameter a so, dass $|z - w|^2 = 25$ ist.

$$|z-w|^2 = \frac{(a-1)^2}{4} + \frac{(a+1)^2}{4}$$

$$= \frac{a^2 - \cancel{2a} + 1 + a^2 + \cancel{2a} + 1}{4} \checkmark$$

$$= \frac{2a^2 + 2}{4} = \frac{a^2+1}{2} \checkmark$$

$$|z-w|^2 = 25 \iff \frac{a^2+1}{2} = 25 \iff a^2 = 49$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = 7}; \quad \boxed{a_2 = -7} \checkmark$$

$\checkmark$

Aufgabe 2: (12 Pkt)

Gegeben sind die folgenden Matrizen bzw. Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & 2a_3 \\ -a_1 & 4a_2 & a_3 \\ 5a_1 & a_2 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -50 \\ -57 \end{pmatrix}$$

(7) a) Lösen Sie die Matrizengleichung

$$A\vec{c} = \vec{b}$$

nach der Matrtix A auf, d.h. berechnen Sie die Werte $a_1, a_2, a_3 \in I\!R$ durch Lösen eines linearen Gleichungssystems, das sich aus der obigen Matrizengleichung ergibt.

Die Ergebnismatrix A in Teilaufgabe b) darf für Teilaufgabe a) nicht verwendet werden!

$A\vec{c} = \vec{b}$ liefert das LGS:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 2a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 11 \\ \text{II} \quad & -2a_1 - 12a_2 + a_3 = -50 \\ \text{III} \quad & 10a_1 - 3a_2 - a_3 = -57 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 11 \\ -2 & -12 & 1 & -50 \\ 10 & -3 & -1 & -57 \end{array}\right) \xrightarrow[5\text{I}-\text{III}]{\text{I}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & -9 & 3 & -39 \\ 0 & 18 & 11 & 112 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}\text{II}]{2\text{II}+\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 3 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 17 & 34 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & 17a_3 = 34 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 2} \\ \text{II} \quad & 3a_2 - 2 = 13 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 5} \\ \text{I} \quad & 2a_1 + 15 + 4 = 11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 4 & 20 & 2 \\ -20 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

zu Aufgabe 2: $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 4 & 20 & 2 \\ -20 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -50 \\ -57 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(5) b) Berechnen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1} mit Hilfe der Cramerschen Formel $a_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})$ für inverse Matrizen. Dabei ist in

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{11} & 10 & -90 \\ a_{21} & 88 & 24 \\ a_{31} & 120 & -60 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \det(A) = 2040$$

lediglich die 1. Spalte zu vervollständigen. Lösen Sie sodann das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe von A^{-1} nach $\vec{x}$ auf.

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 20 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -40 - 10 = -50 \quad ✓$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \det(A_{12}) = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -20 & -2 \end{vmatrix} = -(-8+40) = -32 \quad ✓$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 4 & 20 \\ -20 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 400 = 420 \quad ✓$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad ✓$$

$$= \frac{1}{2040} \begin{pmatrix} -50 & 10 & -90 \\ -32 & 88 & 24 \\ 420 & 120 & -60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -50 \\ -57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ✓$$

denn

$$x_1 = \frac{1}{2040}\left(-50 \cdot 11 - 10 \cdot 50 + 90 \cdot 57\right) = \frac{4080}{2040} = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2040}\left(-32 \cdot 11 - 88 \cdot 50 - 24 \cdot 57\right) = -\frac{6120}{2040} = -3$$

$$x_3 = \frac{1}{2040}\left(420 \cdot 11 - 120 \cdot 50 + 60 \cdot 57\right) = \frac{2040}{2040} = 1$$

Aufgabe 3: (6 Pkt)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

(2) a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

$$0 = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 13 \\ -3 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (9-\lambda)(-7-\lambda) + 39 = -63 - 9\lambda + 7\lambda + \lambda^2 + 39$$

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda - 24 \quad ✓$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 24}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 6} \; ; \quad \boxed{\lambda_2 = -4} \quad ✓$$

(4) b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A.

Für $\lambda = 6$:
$$\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -3 & -13 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \quad ✓$$

$$\mathrm{I} \quad 3x_1 + 13x_2 = 0 \qquad \text{wähle } x_1 = 13\alpha \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 13x_2 = -3 \cdot 13\alpha \Rightarrow x_2 = -3\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Eig}(A;6) = \left\{ \begin{pmatrix} 13\alpha \\ -3\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}} \quad ✓$$

Für $\lambda = -4$:
$$\begin{pmatrix} 13 & 13 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \quad ✓$$

$$\mathrm{I} \quad 13x_1 + 13x_2 = 0 \iff x_1 + x_2 = 0$$

$$\text{wähle } x_1 = \alpha \Rightarrow x_2 = -\alpha \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Eig}(A;-4) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}} \quad ✓$$

Aufgabe 4: (18 Pkt.)

(10) a) Lösen Sie unter der Verwendung der Methoden "Trennung der Variablen" und "Variation der Konstanten" das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + 3x^2\, e^{\sqrt{4x}} \qquad \text{mit} \qquad y(1) = e$$

<u>homogener Fall:</u> $y' = \frac{y}{\sqrt{x}} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}}$

(3) $\iff \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ✓ $\Rightarrow \ln|y| = 2\sqrt{x} + C_1$ ✓

$\Rightarrow y = \pm e^{2\sqrt{x} + C_1}$, $\boxed{y_0 = k e^{2\sqrt{x}}}$ ✓ ; $k \in \mathbb{R}$

<u>inhomogener Fall:</u> Variation der Konstanten

$y = k(x) e^{2\sqrt{x}}$; $k(x)$ Funktion

daraus

$\frac{y}{\sqrt{x}} + 3x^2 e^{\sqrt{4x}} = y' = \left(k(x) e^{2\sqrt{x}}\right)'$

$= k'(x) e^{2\sqrt{x}} + \underbrace{k(x) e^{2\sqrt{x}}}_{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ ✓

(5) $= k'(x) e^{2\sqrt{x}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$ ✓

$\iff 3x^2 e^{\sqrt{4x}} = k'(x) e^{2\sqrt{x}} \quad | : e^{2\sqrt{x}}$ ✓

$\iff k'(x) = 3x^2 \Rightarrow k(x) = x^3 + C$ ✓

$\Rightarrow \boxed{y = (x^3 + C) e^{2\sqrt{x}}}$ ✓ mit $C \in \mathbb{R}$

<u>allg. Lösung.</u>

$e = y(1) = (1 + C) e^2 \iff 1 = (1 + C) e$

$\iff C = \frac{1}{e} - 1$ ✓

(2) $\Rightarrow \boxed{y = \left(x^3 + \frac{1}{e} - 1\right) e^{2\sqrt{x}}}$ ✓

<u>spezielle Lösung</u>

zu Aufgabe 4:

(8) b) Lösen Sie unter Verwendung eines geeigneten partikulären Ansatzes die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 3y' - 4y = 15e^{-x}$$

(2) homogener Fall: $y'' - 3y' - 4y = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 4; \ \lambda_2 = -1 \Rightarrow \boxed{y_0 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}}$

homogene Lösung

(6) inhomogener Fall: partikulärer Lsg. ansatz

lt. Tab $c = -1$ einfache Lsg von $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$\Rightarrow \boxed{y_p = Axe^{-x}} \Rightarrow y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$

$\boxed{y_p' = (A - Ax)e^{-x}}$

$\Rightarrow y_p'' = -Ae^{-x} - (A - Ax)e^{-x}$

$\boxed{y_p'' = (Ax - 2A)e^{-x}}$

eingesetzt in inhomog. Dgl:

$y_p'' - 3y_p' - 4y_p = 15e^{-x}$

$(Ax - 2A)e^{-x} - 3(A - Ax)e^{-x} - 4Axe^{-x} \stackrel{!}{=} 15e^{-x} \quad | \cdot e^{x}$

$Ax - 2A - 3A + 3Ax - 4Ax = 15$

$\Leftrightarrow -5A = 15 \Leftrightarrow A = -3 \Rightarrow \boxed{y_p = -3xe^{-x}}$

partikuläre Lösung

Allgemeine Lösung

$y = y_0 + y_p$

$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - 3xe^{-x}$

$\boxed{y = C_1 e^{4x} + (C_2 - 3x)e^{-x}} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5: (14 Pkt.)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{5x^3}{3} - 3xy - 2x^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{7}{6}$$

(8) a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrem- und Sattelpunkte.

(2) $f_x = 5x^2 - 3y - 4x$; $f_y = -3x - y$ ✓

$f_{xx} = 10x - 4$; $f_{yy} = -1$; $f_{xy} = -3 = f_{yx}$

(2) I $5x^2 - 3y - 4x = 0$

II $-3x - y = 0 \iff \boxed{y = -3x}$

in I: $5x^2 - 3(-3x) - 4x = 0 \iff 5x^2 + 5x = 0$ ✓

$\iff 5x(x+1) = 0$

$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow \boxed{P_1(0/0)}$ ✓

$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 3 \Rightarrow \boxed{P_2(-1/3)}$

(4) $\Delta f(P_1) = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5 < 0$ ✓

$\Rightarrow$ Sattelpunkt $\boxed{S(0/0/\tfrac{7}{6})}$ ✓

$\Delta f(P_2) = \begin{vmatrix} -14 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 14 - 9 = 5 > 0$ ✓

da $f_{xx}(P_2) = -14 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $\boxed{H(-1/3/2)}$ ✓

$f_x = 5x^2 - 3y - 4x$
$f_y = -3x - y$

zu Aufgabe 5: $f(x,y) = \frac{5x^3}{3} - 3xy - 2x^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{7}{6}$

(2) b) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $P(2|-5)$ an.

$$t(x,y) = f_x(P)(x-2) + f_y(P)(y+5) + f(P)$$

$$f_x(P) = 5 \cdot 4 + 15 - 8 = 20 + 7 = 27$$

$$f_y(P) = -6 + 5 = -1 \quad ; \quad f(P) = 24$$

$$\Rightarrow \quad t(x,y) = 27(x-2) - (y+5) + 24$$

$$= 27x - 54 - y - 5 + 24$$

$$\boxed{t(x,y) = 27x - y - 35}$$

(4) c) Berechnen Sie die Steigung von $f(x,y)$ im Punkt $A(-1|5)$ in der Richtung die von A nach $B(1|-3)$ führt (sog. Richtungsableitung).

$$f_{\vec{v}}(A) = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \nabla_f(A) \circ \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{v}| = \sqrt{4+64} = 2\sqrt{17}$$

$$f_x(A) = 5 - 15 + 4 = -6$$

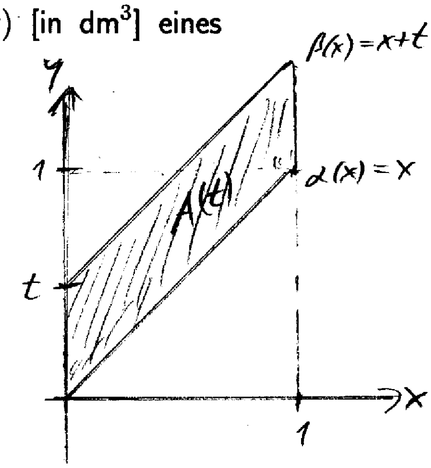
$$f_y(A) = 3 - 5 = -2$$

$$\Rightarrow \quad f_{\vec{v}}(A) = \frac{1}{2\sqrt{17}} \cdot (-6; -2) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-12 + 16}{2\sqrt{17}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{17}} \approx 0{,}485}$$

Aufgabe 6: (10 Pkt)

Für jeden reellen Parameter $t \geq 0$ wird das Volumen $V(t)$ [in dm^3] eines Glaskörpers beschrieben durch die Formel



$$V(t) = \int_0^1 \int_x^{x+t} e^{2y-3x}\, dy\, dx$$

(5) a) Berechnen Sie das Volumen $V(t)$ in Abhängigkeit von t.
Ergebnis: $V(t) = 0,5\left(e^{2t} - e^{2t-1} + \frac{1}{e} - 1\right)$

(3) Inneres Integral:

$$\int_x^{x+t} e^{2y-3x}\, dy = \frac{1}{2}\left[e^{2y-3x}\right]_x^{x+t} \checkmark$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2(x+t)-3x} - e^{2x-3x}\right) \checkmark$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2t-x} - e^{-x}\right) \checkmark$$

(2) Äußeres Integral:

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{2t-x} - e^{-x}\right) dx = \frac{1}{2}\left[e^{-x} - e^{2t-x}\right]_0^1 \checkmark$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{2t-1} - e^0 + e^{2t}\right)$$

$$\boxed{V(t) = \frac{1}{2}\left(e^{2t} - e^{2t-1} + \frac{1}{e} - 1\right)} \checkmark \quad t \geq 0$$

zu Aufgabe 6: $V(t) = 0,5\left(e^{2t} - e^{2t-1} + \frac{1}{e} - 1\right)$

(5) b) Berechnen Sie den Parameter t so, dass die Masse des Glaskörpers 100 kg beträgt. Die Dichte des Glaskörpers ist mit $\rho = 2,5$ kg/dm^3 angegeben.

$$\rho = \frac{m}{V} \iff V = \frac{m}{\rho} = \frac{100\,kg}{2,5\,kg/dm^3} = 40\,dm^3 \checkmark$$

$$V(t) = 40 \iff e^{2t} - e^{2t-1} + \frac{1}{e} - 1 = 80 \checkmark$$

$$\iff e^{2t}(1 - e^{-1}) + \frac{1}{e} - 1 = 80 \checkmark$$

$$\iff e^{2t} = \frac{81 - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{81e - 1}{e - 1} \checkmark$$

$$\iff \boxed{t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{81e-1}{e-1}\right) \approx 2,424} \checkmark$$

Σ 70 Pkt.