Klausur Mathematik II – Bau WS 2011/12

Aufgabe 1: (10 Pkt)
Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z = 10(a-35) - (10a+319)i \quad \text{und} \quad w = 169 \cdot \frac{(6+5i)(2-i)+7-74i}{2(5+12i)}$$

(5) a) Stellen Sie die komplexe Zahl w in der Form $w = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.
[**Ergebnis:** $w = -360 - 319i$]

$$w = 169 \cdot \frac{12+4i+5+7-74i}{2(5+12i)} = 169 \cdot \frac{24-70i}{2(5+12i)}$$

$$= 169 \cdot \frac{(12-35i)(5-12i)}{(5+12i)(5-12i)} = 169 \cdot \frac{60-319i-420}{25+144}$$

$$= 169 \cdot \frac{-360-319i}{169} = -360-319i$$

(5) b) Berechnen Sie den reellen Parameter a so, dass $|z-w|^2 = \cancel{10\sqrt{5}}$ 500 ist.

$$z-w = 10a-350-10ai-\cancel{319i}+360+\cancel{319i}$$

$$= 10a+10-10ai = 10(a+1-ai)$$

$$|z-w|^2 = 500 \Leftrightarrow 100|(a+1)-ai|^2 = 500$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + a^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2a-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+a-2 = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\boxed{a_1 = 1} \quad ; \quad \boxed{a_2 = -2}$$

Aufgabe 2: (15 Pkt.)

Gegeben sind die Matrizen

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 14 & t \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \quad \text{und der Variablenvektor} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(4) a) Bestimmen Sie den reellen Parameter t so, dass das homogene lineare Gleichungssystem $A_t \cdot \vec{x} = \vec{0}$ unendlich viele Lösungen hat.

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 14 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 14 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 26 & t-6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-26\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-6 \end{pmatrix}$$

lösbar mit ∞ vielen Lösungen $\Leftrightarrow t-6=0$
$\Leftrightarrow \boxed{t=6}$

(3) b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A_6 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

$\mathrm{II} \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

III $x_1 + 3x_3 = 0$, wähle $\boxed{x_3 = \lambda} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = -3\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$

zu Aufgabe 2:

(8) c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = A_0$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E_3) = 0 \iff \begin{vmatrix} 2-\lambda & 14 & 0 \\ 0 & -5-\lambda & 0 \\ 1 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (2-\lambda)(-5-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2};\ \boxed{\lambda_2 = -5};\ \boxed{\lambda_3 = 3}$$

zu $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

I $\Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

III $x_1 + x_3 = 0$, wähle $\boxed{x_1 = \alpha} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{x_3 = -\alpha}$

$$\boxed{\mathrm{Eig}(A;2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

zu $\lambda = -5$

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

I $x_1 + 2x_2 = 0$; wähle $\boxed{x_2 = \alpha}$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = -2\alpha}$

III $-2\alpha - 6\alpha + 8x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = \alpha}$

$$\boxed{\mathrm{Eig}(A;-5) = \left\{ \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

zu $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 14 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

II $\Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$ wähle $\boxed{x_3 = \alpha}$

III $\Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$

$$\boxed{\mathrm{Eig}(A;3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 3: (10 Pkt.)
Lösen Sie unter der Verwendung der Methoden "Trennung der Variablen" und "Variation der Konstanten" das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{x^2} - e^{-\frac{1}{x}} \qquad \text{mit} \qquad y(1) = 2$$

(3) homogener Fall: $y' = \frac{y}{x^2}$

Variablentrennung: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2} \iff \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}$ ✓

$\ln|y| = -\frac{1}{x} + C$ ✓ $\Rightarrow \boxed{y_0 = k e^{-\frac{1}{x}}}$ homogene Lsg. ✓

Variation der Konstanten: $y = k(x) e^{-\frac{1}{x}}$

(5) $\frac{y}{x^2} - e^{-\frac{1}{x}} = y' = k'(x) e^{-\frac{1}{x}} + k(x) e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$ ✓

$\frac{y}{x^2} - e^{-\frac{1}{x}} = k'(x) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{y}{x^2}$ ✓

$\iff k'(x) = -1$ ✓ $\Rightarrow k(x) = -x + C_1$ ✓

allg. Lsg $\boxed{y = (C_1 - x) e^{-\frac{1}{x}}}$ ✓

(2) $2 = y(1) = (C_1 - 1) e^{-1} \iff C_1 = 2e + 1$ ✓

spez. Lsg. $\boxed{y = (2e + 1 - x) e^{-\frac{1}{x}}}$ ✓

Aufgabe 4: (10 Pkt.)
Lösen Sie unter Verwendung eines geeigneten partikulären Ansatzes das Anfangswertproblem

$$y'' + 8y' + 15y = 180x - 9 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = -8,\ y'(0) = 9$$

(2)

homogener Fall: $y'' + 8y' + 15y = 0$

char. Gl.: $\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2} \qquad \lambda_1 = -3,\quad \lambda_2 = -5$$

$\Rightarrow$ homog. Lsg $y_0 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-5x}$

(5)

inhomogener Fall: $y_p = ax + b \Rightarrow y_p' = a;\ y_p'' = 0$

in Dgl. eingesetzt: $8a + 15(ax+b) = 180x - 9$

$\Leftrightarrow 15ax + (8a + 15b) = 180x - 9$

Koeffvgl.: I $15a = 180 \Rightarrow a = 12$

II $8a + 15b = -9 \Rightarrow b = -7$ $\Big\} \Rightarrow y_p = 12x - 7$

allg. Lsg: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-5x} + 12x - 7$

$y' = -3C_1 e^{-3x} - 5C_2 e^{-5x} + 12$

(3)

$-8 = y(0) = C_1 + C_2 - 7$

$9 = y'(0) = -3C_1 - 5C_2 + 12$ $\Big\} \Rightarrow$ I $C_1 + C_2 = -1$

II $-3C_1 - 5C_2 = -3$

5I+II: $2C_1 = -8$

$\boxed{C_1 = -4}$

I $\Rightarrow \boxed{C_2 = 3}$

Spezielle Lsg:

$$\boxed{y = 3e^{-5x} - 4e^{-3x} + 12x - 7}$$

Aufgabe 5: (10 Pkt.)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + 4xy + x + 2y^2 + 9$$

(8) a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrem- und Sattelpunkte.

(2)
$$f_x = 3x^2 + 4y + 1 \quad ; \quad f_y = 4x + 4y$$
$$f_{xx} = 6x \qquad f_{yy} = 4$$
$$f_{xy} = 4 = f_{yx}$$

(2)
$$\text{I} \quad 3x^2 + 4y + 1 = 0 \quad , \quad \text{II} \quad 4x + 4y = 0 \Rightarrow y = -x$$
$$\text{in I} \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$$
$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = -1 \Rightarrow P_1(1|-1)$$
$$x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow P_2\left(\frac{1}{3}\Big|-\frac{1}{3}\right)$$

(2)
$$\Delta_f(P_1) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8 > 0$$
da $f_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow$ lok. Min $\boxed{T(1|-1|9)}$

(2)
$$\Delta_f(P_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 16 = -8 < 0$$
$\Rightarrow$ Sattelpunkt $\boxed{S\left(\frac{1}{3}\Big|-\frac{1}{3}\Big|\frac{247}{27}\right)}$

(2) b) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $P(1|2)$ an.

$$t(x,y) = f_x(P)(x-1) + f_y(P)(y-2) + f(P)$$
$$= 12(x-1) + 12(y-2) + 27$$
$$\boxed{t(x,y) = 12x + 12y - 9}$$

Aufgabe 6: (15 Pkt.)

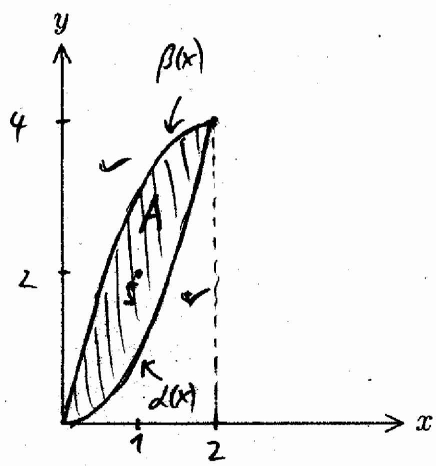
Gegeben ist das Flächenstück

$$A = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leq x \leq 2,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \right\}$$

mit den Randkurven $\alpha(x) = x^2$ und $\beta(x) = 4 - (x-2)^2$. $= 4 - x^2 + 4x - 4$

$= 4x - x^2$

(2) a) Skizzieren Sie das Flächenstück A in der xy-Ebene.



(3) b) Berechnen Sie das Flächenstück A.

$$A = \int_0^2 \left(\beta(x) - \alpha(x) \right) dx = \int_0^2 \left(4x - x^2 - x^2 \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(4x - 2x^2 \right) dx = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

zu Aufgabe 6:

(10) c) Berechnen Sie die Koordinaten des Flächenschwerpunkts S der Fläche A mit Hilfe der Formeln

$$x_S = \frac{1}{A}\iint_A x\,dA \qquad \text{und} \qquad y_S = \frac{1}{A}\iint_A y\,dA$$

(4)

$$x_s = \frac{1}{A}\int_0^2\int_{d(x)}^{f(x)} x\,dy\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x\int_{x^2}^{4x-x^2} dy\,dx$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^2 x\left(4x-x^2-x^2\right)dx = \frac{3}{8}\int_0^2\left(4x^2-2x^3\right)dx$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3} = 1$$

(6)

$$y_s = \frac{1}{A}\int_0^2\int_{d(x)}^{f(x)} y\,dy\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{4x-x^2} dx$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^2\left(\left(4x-x^2\right)^2-x^4\right)dx$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^2\left(16x^2-8x^3+x^4-x^4\right)dx = \frac{3}{16}\int_0^2\left(16x^2-8x^3\right)dx$$

$$= \frac{3}{16}\left[\frac{16x^3}{3}-2x^4\right]_0^2 = \frac{3}{16}\cdot\frac{32}{3} = 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{Schwerpunkt } S(1|2)}$$