Klausur Bau-Mathe 1 WS 09/10 am 26.01.10

24 P. **Aufgabe 1:**
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2}$$

(3) a) Ermitteln Sie für die obige Funktion f den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.

(1) $\boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

$f(x) = 0 \iff 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -2$

$\boxed{N_1 \left(-\frac{1}{2} / 0\right)}$ (1) $\boxed{N_2 (-2/0)}$ (1)

(3) b) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von $f(x)$ für $|x| \longrightarrow \infty$ und an den Polstellen. Geben Sie die Asymptotengleichungen an.

$f(x) = 2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}$

$\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to \infty} \left(2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 2 + 0 + 0 = 2$

$\Rightarrow$ horizontale Asymp: $\boxed{y = 2}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2} = \frac{2}{0+} = \infty$

$\Rightarrow$ vertikale Asymp: $\boxed{x = 0}$

zu Aufgabe 1: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^2}$

(6) c) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$.

(3) $$f'(x) = \frac{(4x+5)x^2 - 2x(2x^2+5x+2)}{x^4}$$

$$= \frac{(4x+5)x - 2(2x^2+5x+2)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{4x^2} + 5x - \cancel{4x^2} - 10x - 4}{x^3}$$

$$= \frac{-5x - 4}{x^3}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}}$$

(3) $$f''(x) = -\frac{5x^3 - 3x^2(5x+4)}{x^6}$$

$$= -\frac{5x - 3(5x+4)}{x^4}$$

$$= -\frac{5x - 15x - 12}{x^4}$$

$$= -\frac{-10x - 12}{x^4}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{10x+12}{x^4}}$$

[Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{5x+4}{-x^3}$ und $f''(x) = \dfrac{10x+12}{x^4}$]

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^2}; \quad f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}; \quad f''(x) = \frac{10x+12}{x^4}\right]$

(6) d) Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema sowie Wendepunkte von f. Stellen Sie die Gleichung der Tangente an f bei $x = -0,5$ auf.

(2) Lokale Extrema

(1) $f'(x) = 0 \iff 5x+4 = 0 \iff x = -\frac{4}{5}$

(1) $f''(-\frac{4}{5}) = \frac{-8+12}{(-4/5)^4} = \frac{4}{(4/5)^4} > 0$

$\implies$ lokales Minimum $\boxed{T(-\frac{4}{5} \mid -\frac{9}{8})}$

(2) Wendepunkte

(1) $f''(x) = 0 \iff 10x+12 = 0 \iff x = -\frac{6}{5}$

(1) wegen VZW von $f''(x) \implies$ Wendepunkt $\boxed{W(-\frac{6}{5} \mid -\frac{7}{9})}$

(2) Tangente

$t(x) = f'(-0,5)(x+\frac{1}{2}) + \underbrace{f(-0,5)}_{=0 \text{ wegen a)}}$

$= 12(x+\frac{1}{2}) = 12x+6$

$\boxed{t(x) = 12x+6}$

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \dfrac{2x^2+5x+2}{x^2}; \quad f'(x) = \dfrac{5x+4}{-x^3}; \quad f''(x) = \dfrac{10x+12}{x^4}\right]$

(3) **e)** Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten von f.

(2) <u>Monotonie</u>

$\searrow$ T $\nearrow$ P $\searrow$ da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$

$-\frac{4}{5}$ 0

oder auch: $f'(x) < 0$ für $x > 0$

$$f \text{ ist } \begin{cases} \text{mon steigend für } -\frac{4}{5} < x < 0 \\ \text{mon fallend für } x < -\frac{4}{5} \vee x > 0 \end{cases}$$

(1) <u>Krümmung</u>

$$x \neq 0$$

$$f''(x) \begin{cases} > 0 \text{ für } x > -\frac{6}{5} \text{ (linksgekrümmt)} \\ < 0 \text{ für } x < -\frac{6}{5} \text{ (rechtsgekrümmt)} \end{cases}$$

(3) **f)** Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im dritten Quadranten einschließt, d. h. im Intervall $[-2; -0,5]$.

$$A = \left| \int_{-2}^{-0,5} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{-2}^{-0,5} \left(2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx \right|$$

$$= \left| \left[2x + 5 \ln|x| - \frac{2}{x} \right]_{-2}^{-0,5} \right| \quad (2)$$

$$= \left| \left(-1 + 5 \ln \overbrace{0,5}^{=2^{-1}} + 4\right) - \left(-4 + 5 \ln 2 + 1\right) \right|$$

$$= \left| 3 - 5 \ln 2 + 4 - 5 \ln 2 - 1 \right|$$

$$= \left| 6 - 10 \ln 2 \right| \approx \boxed{0,9315 \text{ FE}} \quad (1)$$

10 P. **Aufgabe 2:**
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 3\sin(2x) + (\pi - 6x)\cos(2x) \qquad \text{für} \qquad 0 < x < \pi$$

(4) a) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$. $\left[\text{Teilergebnis: } f'(x) = 2(6x - \pi)\sin(2x)\right]$

$$f'(x) = 3 \cdot 2\cos 2x - 6\cos 2x - (\pi - 6x) \cdot 2\sin 2x$$

$$= 6\cos 2x - 6\cos 2x + 2(6x - \pi)\sin 2x$$

$$\boxed{f'(x) = 2(6x - \pi)\sin 2x} \quad (3)$$

$$f''(x) = 12\sin 2x + 2(6x - \pi) \cdot 2\cos 2x$$

$$\boxed{f''(x) = 12\sin 2x + 4(6x - \pi)\cos 2x} \quad (1)$$

(5) b) Ermitteln Sie Art und Lage aller lokalen Extrema von f.

(1) $f'(x) = 0 \iff (6x - \pi)\sin 2x = 0$

$\iff 6x - \pi = 0 \lor \sin 2x = 0$

$\iff \boxed{x = \frac{\pi}{6}} \lor 2x = \pi$ d.h. $\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

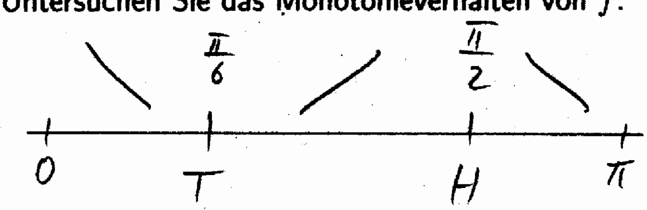
(2) $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 12\sin\frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3} > 0$

$\implies$ lok Min $\boxed{T\left(\frac{\pi}{6} \,\middle|\, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$

(2) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4(3\pi - \pi)\overbrace{\cos\pi}^{-1} = -8\pi < 0$

$\implies$ lok Max $\boxed{H\left(\frac{\pi}{2} \,\middle|\, 2\pi\right)}$

(1) c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.



f ist $\begin{cases} \text{mon steigend für } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \\ \text{mon fallend für } 0 < x < \frac{\pi}{6} \lor \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

18P. **Aufgabe 3:**
Berechnen Sie die folgenden Integrale!

(6) a) $\int \frac{x+8}{1-2x^2+x}\,dx$ (Partialbruchzerlegung)

$$1-2x^2+x = 0 \iff 2x^2-x-1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 1 \; ; \; x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1-2x^2+x = -2(x-1)(x+\tfrac{1}{2}) = (1-x)(2x+1)$$

$$\frac{x+8}{(1-x)(2x+1)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1)+B(1-x)}{(1-x)(2x+1)}$$

(4)

$$x = 1 \Rightarrow 3A = 9 \iff A = 3$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}B = \frac{15}{2} \iff B = 5$$

$$\int \frac{x+8}{1-2x^2+x}\,dx = \int \left(\frac{3}{1-x} + \frac{5}{2x+1}\right) dx$$

(2)

$$= 3\int \frac{dx}{1-x} + 5\int \frac{dx}{2x+1}$$

$$= -3\ln|1-x| + \frac{5}{2}\ln|2x+1|$$

zu Aufgabe 3:

(5) b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x^2-1)\sin x\,dx$ **(Zweifache partielle Integration)**

$$\int (x^2-1)\sin x = -(x^2-1)\cos x - \int(-\cos x)\cdot 2x\,dx$$

$$= (1-x^2)\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

(4) $$= (1-x^2)\cos x + 2\Big(x\sin x - \int \sin x\,dx\Big)$$

$-\cos x$

$$= (1-x^2)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$$

$$= 2x\sin x + (3-x^2)\cos x$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (x^2-1)\sin x\,dx = \Big[2x\sin x - (x^2-3)\cos x\Big]_{\pi/2}^{\pi}$$

(1) $$= \Big(2\pi\underbrace{\sin\pi}_{=0} - (\pi^2-3)\underbrace{\cos\pi}_{-1}\Big) - \Big(\pi\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{=1} - (\tfrac{\pi^2}{4}-3)\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{=0}\Big)$$

$$= \pi^2 - 3 - \pi \approx 3{,}728$$

[**Teilergebnis:** $\int (x^2-1)\sin x\,dx = 2x\sin x - (x^2-3)\cos x + C$]

zu Aufgabe 3:

(4) c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln\left(\sqrt{x}\,\right)}{x}\,dx$ $\left[\text{Substitution mit:} \quad t = \ln\left(\sqrt{x}\,\right)\right]$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \Longleftrightarrow \boxed{dx = 2x\,dt}$$

(3)

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx = \int \frac{t}{x} \cdot 2x\,dt = \int 2t\,dt$$

$$= t^2 = \left(\ln\sqrt{x}\right)^2$$

daraus

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx = \left[\left(\ln\sqrt{x}\right)^2\right]_e^{e^2}$$

$$= (\ln e)^2 - \left(\ln\sqrt{e}\right)^2 \qquad (1)$$

$$= 1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

zu Aufgabe 3:

(3) d) $\int \frac{6x^3 - 35x^2 + 48x + 10}{x^2 - 6x + 9}\, dx$ (Polynomdivision)

(1) $(6x^3 - 35x^2 + 48x + 10) : (x^2 - 6x + 9) = 6x + 1 + \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$

$$
\begin{array}{l}
-(6x^3 - 36x^2 + 54x) \\
\hline
\qquad x^2 - 6x + 10 \\
\quad -(x^2 - 6x + 9) \\
\hline
\qquad\qquad 1
\end{array}
$$

da $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, so folgt

(2) $\int \left(6x + 1 + \frac{1}{(x-3)^2}\right) dx = 3x^2 + x - \frac{1}{x-3}$

10 P. **Aufgabe 4:**

Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = (x+1)(2x^2 - 2x + 1) \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^2 + 5x + 1$$

Ermitteln Sie die Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$. Berechnen Sie sodann den Inhalt der Fläche A, die von $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird.
(Beachten Sie, dass A aus mehreren Teilen bestehen kann!)
[Teilergebnis: Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$ bei $x = -\frac{3}{2}; 0; 2$]

(1) $f(x) = 2x^3 \cancel{-2x^2} + x \cancel{+2x^2} - 2x + 1$

$f(x) = 2x^3 - x + 1$

$f(x) = g(x) \iff 2x^3 - x + 1 = x^2 + 5x + 1$

(1) $\iff \boxed{2x^3 - x^2 - 6x} = 0$ $f(x) - g(x)$

$\iff x(2x^2 - x - 6) = 0$

(1) $\boxed{x_1 = 0}$ $\quad 2x^2 - x - 6 = 0$

$x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$

(1) $\boxed{x_2 = 2}$; $\boxed{x_3 = -\frac{3}{2}}$ (1)

(1) $H(x) = \int (f-g)\,dx = \int (2x^3 - x^2 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$

(1) $H(-\frac{3}{2}) = -\frac{99}{32}$; $H(0) = 0$, $H(2) = -\frac{20}{3}$

(1) $A_1 = \int_{-3/2}^{0} (f-g)\,dx = H(0) - H(-\frac{3}{2}) = \frac{99}{32}$ FE

(1) $A_2 = \left| \int_0^2 (f-g)\,dx \right| = |H(2) - H(0)| = \left| -\frac{20}{3} \right| = \frac{20}{3}$ FE

(1) $A = A_1 + A_2 = \frac{937}{96} \approx \boxed{9{,}76 \text{ FE}}$

8P. **Aufgabe 5:**
Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z = \frac{2(a+i)}{1+i} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbf{R}$$

(4) a) Bestimmen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ und $|z|$ in Abhängigkeit von a.
[Zwischenergebnis: $\mathrm{Re}(z) = a + 1$ und $\mathrm{Im}(z) = 1 - a$]

$$z = \frac{2(a+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(a - ai + i - i^2)}{1 \underbrace{- i^2}_{=1}}$$

(3) $$= \frac{\cancel{2}(a - ai + i + 1)}{\cancel{2}} = a - ai + i + 1$$

$$= \underbrace{(a+1)}_{Re(z)} + \underbrace{(1-a)}_{Im(z)} i$$

$$|z| = \sqrt{(a+1)^2 + (1-a)^2} = \sqrt{a^2 + \cancel{2a} + 1 + 1 - \cancel{2a} + a^2}$$

(1) $$= \sqrt{2a^2 + 2}$$

(4) b) Für welche $a \in \mathbf{R}$ gilt $|z| = 2$? Wie lauten in diesem Fall die komplexen Zahlen z in kartesischer Form?

$$|z| = 2 \iff \sqrt{2a^2+2} = 2$$

$$\implies 2a^2 + 2 = 4$$

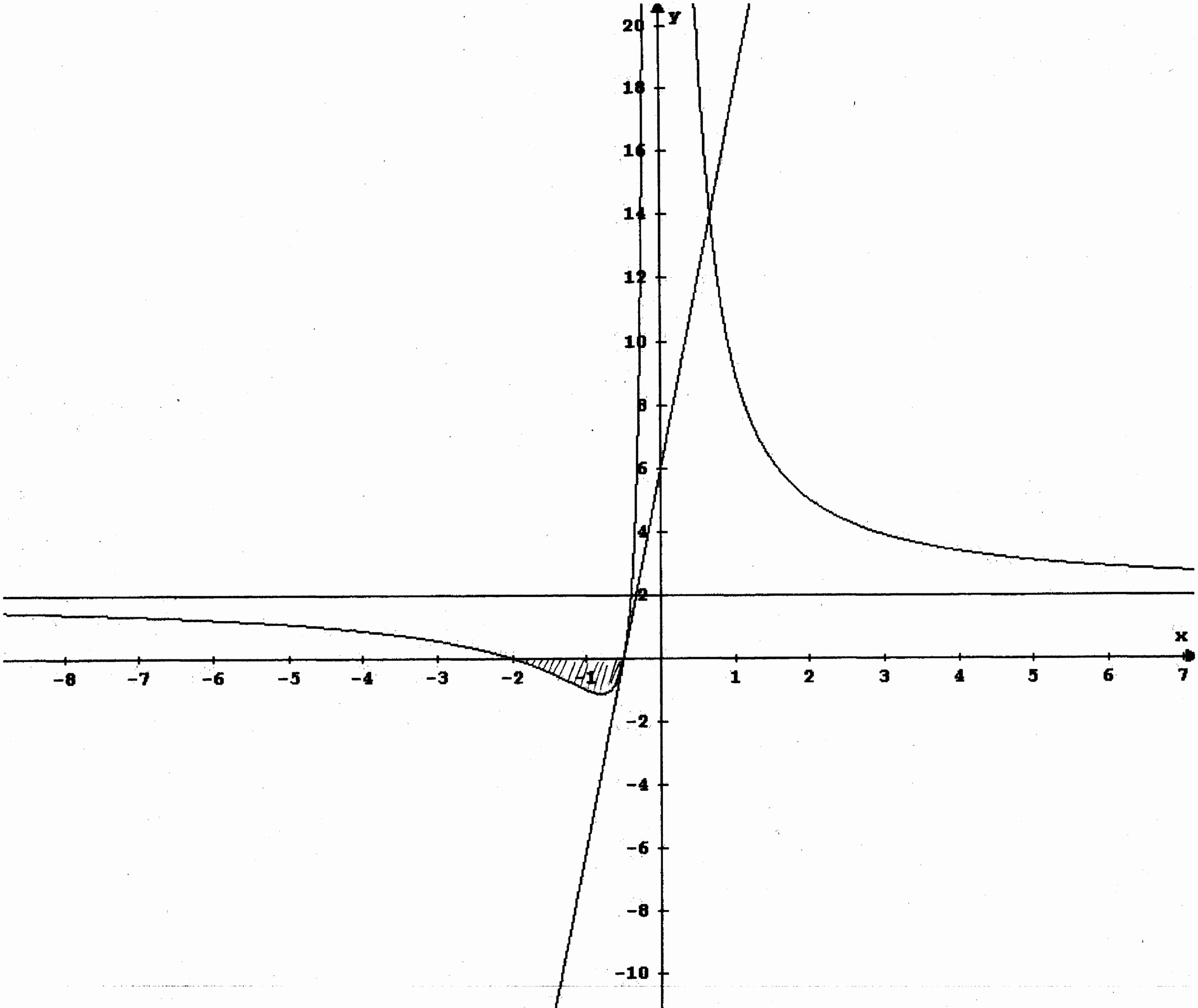
(2) $$\iff 2a^2 = 2$$

$$\iff a^2 = 1$$

$$\boxed{a = 1} \vee \boxed{a = -1}$$

(2) $$\begin{cases} \text{für } a = 1 \implies \boxed{z = 2} \\ \text{für } a = -1 \implies \boxed{z = 2i} \end{cases}$$

zu Afg 1



Afg 4