Klausur Bau-Mathe 1 SS 2015

Aufgabe 1: (27 Pkt)
Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = 4(x+2)e^{-0,5x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = -4xe^{-0,5x}$$

(6) a) Ermitteln Sie die Schnittstellen von f mit den Koordinatenachsen. Berechnen Sie $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)$ und geben Sie die Asymptotengleichung von f an.

mit y-Achse: $f(0) = 8e^0 = 8$ ✓

mit x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ✓

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0$ (unbestimmter Ausdruck)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4(x+2)}{e^{0,5x}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{0,5e^{0,5x}} = \frac{4}{\infty} = 0$ ✓

$\Rightarrow$ horizontale Asymptote $y = 0$ ✓

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \cdot e^{-(-\infty)} = -\infty \cdot \infty = -\infty$ ✓

(7) b) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$ [Ergebnisse: siehe nächste Seite!]

$$f'(x) = 4e^{-0,5x} + 4(x+2)e^{-0,5x} \cdot (-0,5)$$
$$= 4e^{-0,5x} - 2(x+2)e^{-0,5x}$$
$$= (4-2x-4)e^{-0,5x}$$
$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -2xe^{-0,5x}}$$ ✓

$$f''(x) = -2e^{-0,5x} - 2xe^{-0,5x} \cdot (-0,5)$$
$$= -2e^{-0,5x} + xe^{-0,5x}$$
$$\boxed{f''(x) = (x-2)e^{-0,5x}}$$ ✓

zu Afg 1: $f(x) = 4(x+2)e^{-0,5x}$; $f'(x) = -2xe^{-0,5x}$; $f''(x) = (x-2)e^{-0,5x}$

(6) c) Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema sowie den Wendepunkt von f und geben Sie die Gleichung der Wendetangente von f an.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

$f''(0) = -2e^0 = -2 < 0$ ✓

$\Rightarrow$ lokales Maximum $\boxed{H(0|8)}$ ✓

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

wegen VZW von $f''(x)$ ✓ $\Rightarrow$ Wendepunkt $\boxed{W(2 \,|\, \frac{16}{e})}$ ✓ $\approx 5,89$

Zur Wendetangente:

$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$

$= -\frac{4}{e}(x-2) + \frac{16}{e}$ ✓

$= -\frac{4}{e}x + \frac{8}{e} + \frac{16}{e}$

$\Rightarrow$ $\boxed{t(x) = -\frac{4}{e}x + \frac{24}{e}}$ ✓

$t(x) \approx -1,47x + 8,83$

zu Afg 1: $f(x) = 4(x+2)e^{-0,5x}$; $g(x) = -4xe^{-0,5x}$

(8) d) Ermitteln Sie die Schnittstelle a von $f(x)$ und $g(x)$. Berechnen Sie sodann die Maßzahl der Fläche, die von den Graphen von f und g im Intervall $[a; 2]$ eingeschlossen wird.
Hinweis: Berechnen Sie eine Stammfunktion $H(x)$ von $f(x) - g(x)$ mittels partieller Integration. [**Teilergebnis:** $H(x) = -16(x+3)e^{-0,5x}$]

$$f(x) = g(x) \iff 4(x+2)e^{-0,5x} = -4xe^{-0,5x} \quad | \cdot e^{0,5x}$$

$$\iff 4x + 8 = -4x$$

$$\iff 8x = -8 \iff \boxed{x = -1} = a$$

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int (8x+8)e^{-0,5x}\,dx$$

$$= 8 \int (x+1)e^{-0,5x}\,dx$$

$$= 8\left(-2(x+1)e^{-0,5x} - \int (-2)e^{-0,5x}\,dx\right)$$

$$= 8\left(-2(x+1)e^{-0,5x} + 2\int e^{-0,5x}\,dx\right)$$

$$= 8\left((-2x-2)e^{-0,5x} - 4e^{-0,5x}\right)$$

$$= 8(-2x-6)e^{-0,5x} = -16(x+3)e^{-0,5x}$$

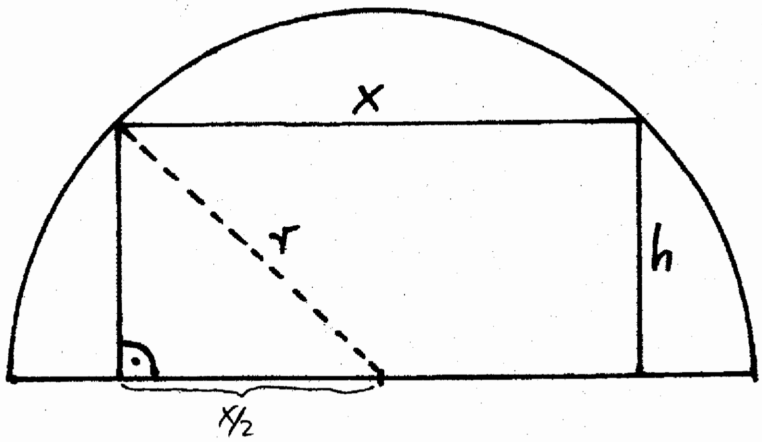
daraus

$$\int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = H(2) - H(-1)$$

$$= -\frac{80}{e} + 32 \cdot \sqrt{e} \approx 23,33 \text{ FE}$$

Aufgabe 2: (13 Pkt)
Aus einem halbzylindrischen Baumstamm mit Radius $r = 10$ dm soll ein Balken mit rechteckförmigem Querschnitt der Breite x und Höhe h wie in der gegebenen Skizze hergestellt werden.

(5) **a) Stellen Sie die Querschnittsfläche $A(x)$ des einbeschriebenen Rechtecks in Abhängigkeit der Breite x dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für $A(x)$ an.** $\left[\textbf{Ergebnis: } A(x) = 0,5x\sqrt{400 - x^2}\right]$



gem. Pythagoras: $h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2$

$\Rightarrow h = \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}(400-x^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{400-x^2}$

Fläche: $A(x) = x\,h = \frac{x}{2}\sqrt{400-x^2}$

Es muss gelten $x > 0$ und $400 - x^2 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 < 400 \Leftrightarrow x < 20$

$\Rightarrow \boxed{D(A) =]0;20[}$ Definitionsbereich

zu Afg 2: $A(x) = 0,5x\sqrt{400 - x^2}$

(8) **b) Ermitteln Sie die Breite x des Rechtecks so, dass die Querschnittsfläche $A(x)$ maximal wird. Berechnen Sie zusätzlich die maximale Querschnittsfläche A_{max} sowie die Höhe h des Balkens.**

$$A(x) = 0,5x \cdot (400 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$A'(x) = 0,5 \cdot (400 - x^2)^{\frac{1}{2}} + 0,5x \cdot \frac{1}{2}(400 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= 0,5 \cdot \sqrt{400 - x^2} - \frac{0,5x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$$

$$= \frac{0,5(400 - x^2) - 0,5x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{A'(x) = \frac{200 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}}}$$

$$A'(x) = 0 \iff 200 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 10\sqrt{2} \approx 14,14 \text{ dm}$$

$$A(10\sqrt{2}) = 100 \text{ dm}^2 \quad , \quad A(0) = A(20) = 0$$

$\Rightarrow A(10\sqrt{2}) = A_{max}$ maximale Querschnittfläche

außerdem

$$h = 0,5\sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = 0,5\sqrt{200} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ dm}$$

Aufgabe 3: (14 Pkt)

Für die folgende Aufgabe den Taschenrechner auf Bogenmaß [RAD] umstellen!!

Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^{1,5} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx \quad \text{[5 Stellen hinter dem Komma genau]}$$

(5) a) analytisch mit Hilfe einer Stammfunktion (substituiere $t = \sin x$).

$$\boxed{t = \sin x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \cos x \Leftrightarrow \boxed{dx = \frac{dt}{\cos x}}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{t}} \frac{dt}{\cos x} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{\sin x}$$

$$\Rightarrow \int_1^{1,5} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = 2\left(\sqrt{\sin 1,5} - \sqrt{\sin 1}\right) = \underbrace{\boxed{0,16286}}_{\text{analytisch}}$$

(8) b) numerisch mit Hilfe der Trapezformel durch Zerlegung des Integrationsintervalls in 5 Teilintervalle.

$$n = 5 \Rightarrow h = \frac{1,5 - 1}{5} = 0,1$$

$$\Rightarrow y_i = f(1 + 0,1i) = \frac{\cos(1 + 0,1i)}{\sqrt{\sin(1+0,1i)}}; \quad i = 0;1;\ldots;5$$

i	0	1	2	3	4	5
y_i	0,5839	0,4804	0,3753	0,2725	0,1712	0,0708

$$\int_1^{1,5} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = \left(\frac{y_0 + y_5}{2} + \sum_{i=1}^{4} y_i\right) \cdot 0,1 = \underbrace{\boxed{0,16293}}_{\text{numerisch}}$$

(1) c) Um wieviel % weicht die numerische von der analytischen Lösung ab?

$$\%\text{-Abw} = \frac{0,16293 - 0,16286}{0,16286} = \boxed{0,04\ \%}$$

Aufgabe 4: (16 Pkt)

In einer elektrischen Versuchsanordnung ist die Stromstärke $I = I(t)$ [in A] in Abhängigkeit von der Zeit t [in s] wie folgt dargestellt:

$$I(t) = \frac{I_0(1+e^{kt})}{3e^{kt}-1} \quad \text{mit} \quad t \geq 0 \quad \text{und} \quad k > 0$$

(5) a) Zeigen Sie, dass $I(0) = I_0$ gilt. Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$ und für den Zeitpunkt $t_1 = \frac{\ln(3)}{k}$ die Stromstärke $I(t_1)$ jeweils in Abhängigkeit von I_0.

$$I(0) = \frac{I_0(1+e^0)}{3e^0-1} = \frac{I_0(1+1)}{3-1} = I_0$$

$$I\left(\frac{\ln 3}{k}\right) = \frac{I_0(1+e^{\ln 3})}{3e^{\ln 3}-1} = \frac{I_0(1+3)}{3\cdot 3-1} = \frac{I_0}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} I(t) \overset{l'H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{I_0 \cdot \cancel{k \cdot e^{kt}}}{3\cancel{k\cdot e^{kt}}} = \frac{I_0}{3}$$

(5) b) Lösen Sie $I = I(t)$ allgemein nach t auf. [**Ergebnis:** $t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{I+I_0}{3I-I_0}\right)$]
[**Hinweis:** Substituiere in o. g. Formel $e^{kt} = x$ und löse zunächst nach x auf!]

$$I = \frac{I_0(1+x)}{3x-1} \iff (3x-1)I = I_0(1+x)$$

$$\iff 3xI - I = I_0 + I_0 x$$

$$\iff (3I - I_0)x = I + I_0$$

$$\iff e^{kt} = x = \frac{I+I_0}{3I-I_0}$$

$$\iff \boxed{t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{I+I_0}{3I-I_0}\right)}$$

zu Afg 4: $I(t) = \dfrac{I_0(1+e^{kt})}{3e^{kt}-1}$; $t = \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{I+I_0}{3I-I_0}\right)$

(3) c) Setzen Sie nun $k = 0,4$.
Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt t_2 die Stromstärke I noch 35% des Wertes von I_0 beträgt.

$I = I(t_2) = 0,35\, I_0$

daraus

$$t_2 = 2,5 \ln\left(\frac{0,35 I_0 + I_0}{3 \cdot 0,35 I_0 - I_0}\right) = 2,5 \ln\left(\frac{1,35}{0,05}\right)$$
$$= \boxed{8,24\ s}$$

(3) d) Sei weiterhin $k = 0,4$.
In einem Versuch sinkt die Stromstärke im Zeitintervall $[0; t_3]$ von I_0 um 30% auf den Wert von $I = I(t_3) = 4,2\ A$ ab. Ermitteln Sie die Stromstärke I_0 und den Zeitpunkt t_3 (auf 2 Nachkommastellen gerundet).

$$I_0(1-0,3) = 4,2 \iff I_0 = \frac{4,2}{0,7} = \boxed{6\ A}$$

$$t_3 = 2,5 \ln\left(\frac{4,2+6}{3 \cdot 4,2 - 6}\right) = 2,5 \ln\left(\frac{10,2}{6,6}\right) = \boxed{1,09\ s}$$

Aufgabe 5: (10 Pkt)
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.
Untersuchen Sie zusätzlich bei b) die Ränder des Konvergenzbereiches.

(4) a) $P(x) = 2! + 3!\,x + 4!\,x^2 + 5!\,x^3 + 6!\,x^4 + ...$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)!\,x^n \checkmark \Rightarrow a_n = (n+2)!$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{\cancel{(n+2)!}}{(n+3)\cancel{(n+2)!}} \checkmark = \frac{1}{n+3} \checkmark$$

$$\Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+3}\right) = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow$ P(x) konvergiert nur für $x = 0$.

(6) b) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (5n+1)\left(-\frac{x}{3}\right)^n$ [**Hinweis:** Ermittle zunächst a_n]

$$(5n+1)\left(-\frac{x}{3}\right)^n = (-1)^n \frac{5n+1}{3^n} \cdot x^n \Rightarrow \boxed{a_n = (-1)^n \frac{5n+1}{3^n}} \checkmark$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{5n+1}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{5(n+1)+1} \checkmark = \frac{5n+1}{\cancel{3^n}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{3^n}}{5n+6} = \frac{15n+3}{5n+6} \checkmark$$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{15n+3}{5n+6} \overset{l'H}{=} \frac{15}{5} = 3 \checkmark$$

P(x) konvergiert für alle x mit $|x| < 3$ (d.h. $-3 < x < 3$)

An den Rändern prüfen:

$P(3) = \sum_{n=0}^{\infty} (5n+1)(-1)^n$ divergiert, da $(5n+1)(-1)^n$ keine Nullfolge ✓

$P(-3) = \sum_{n=0}^{\infty} (5n+1)$ divergiert aus dem selben Grund ✓