Klausur Bau - Mathe 1 SS 2014

Aufgabe 1: (28 Pkt)
Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = (6-x)\sqrt{x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad \text{für} \quad x \geq 0$$

(4) a) Ermitteln Sie die Nullstellen von f und berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

$$f(x) = 0 \iff 6 - x = 0 \vee \sqrt{x} = 0$$

$$\iff \boxed{x_1 = 6}\,;\ \boxed{x_2 = 0}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \cdot \sqrt{\infty} = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

(7) b) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$ [Ergebnisse: siehe nächste Seite!]

$$f'(x) = -\sqrt{x} + (6-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\sqrt{x} + \frac{6-x}{2\sqrt{x}} = \frac{-2x+6-x}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{6-3x}{2\sqrt{x}}}$$

$$f''(x) = \frac{-3\cdot 2\sqrt{x} - (6-3x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} \quad \begin{matrix}\cdot\sqrt{x}\\ \cdot\sqrt{x}\end{matrix}$$

$$= \frac{-6x-(6-3x)}{4x\cdot\sqrt{x}} = \frac{-6x-6+3x}{4x\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{-3x-6}{4x\sqrt{x}}}$$

zu Afg 1: $f(x) = (6-x)\sqrt{x}$; $f'(x) = \dfrac{6-3x}{2\cdot\sqrt{x}}$; $f''(x) = \dfrac{-3x-6}{4x\cdot\sqrt{x}}$

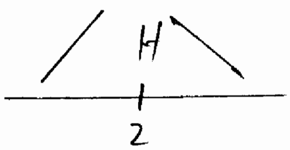
(6) c) **Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema von f und untersuchen Sie das Monotonie- sowie das Krümmungsverhalten von f.**

$f'(x) = 0 \iff 6-3x = 0 \iff x = 2$ ✓

$f''(2) = \dfrac{-12}{8\sqrt{2}} < 0$ ✓ $\Rightarrow$ lok. Maximum

$\Rightarrow$ Hochpunkt $\boxed{H(2 \mid 4\sqrt{2})}$ ✓

Monotonie:



f ist $\begin{cases} \text{sms für } x < 2 \\ \text{smf für } x > 2 \end{cases}$ ✓ ✓

Krümmung:

Es ist $f''(x) < 0$ für $x > 0$

$\Rightarrow$ f ist überall rechtsgekrümmt ✓

(6) d) **Stellen Sie die Gleichung der Tangente t auf, die den Graphen von f berührt und zur Geraden $y = -1,5x + 2$ parallel verläuft.**
[**Hinweis:** Probe für die Wurzelgleichung durchführen!].

$f'(x) = -\frac{3}{2} \iff \dfrac{6-3x}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{3}{2} \quad \Big| \cdot 2\sqrt{x}$ ✓

$\iff 6-3x = -3\sqrt{x} \quad | : (-3)$

$\iff x-2 = \sqrt{x} \quad |^2$ ✓

$\Rightarrow (x-2)^2 = x \iff x^2-4x+4 = x$

$\iff x^2-5x+4 = 0$ ✓

$x_{1/2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$ ✓

Probe: $x = 4$: $\dfrac{6-12}{2\cdot 2} = \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2}$ ok ✓

$x = 1$: $\dfrac{6-3}{2} = \dfrac{3}{2} \neq -\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ nur $x = 4$ Lösung

$\Rightarrow t(x) = f'(4)(x-4) + f(4) = -\frac{3}{2}(x-4) + 4$

$\Rightarrow \boxed{t(x) = -1,5x + 10}$ Tangente ✓

zu Afg 1: $f(x) = (6-x)\sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

(5) e) Ermitteln Sie die Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$. Berechnen Sie sodann die Maßzahl der Fläche, die von den Graphen von f und g begrenzt wird.
Hinweis: Beachten Sie bei der Integration, dass $x \cdot \sqrt{x} = x^{1,5}$ gilt!
[**Teilergebnis:** Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$ bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$]

$$f(x) = g(x) \iff (6-x)\sqrt{x} = \sqrt{x}$$
$$\iff (5-x)\sqrt{x} = 0$$
$$\iff \boxed{x_1 = 0} \ ; \ \boxed{x_2 = 5}$$

$$f(x) - g(x) = (5-x)\sqrt{x} = 5\sqrt{x} - x\sqrt{x}$$
$$= 5x^{1/2} - x^{1,5}$$

$$\Rightarrow \int_0^5 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^5 (5x^{1/2} - x^{1,5})\,dx$$

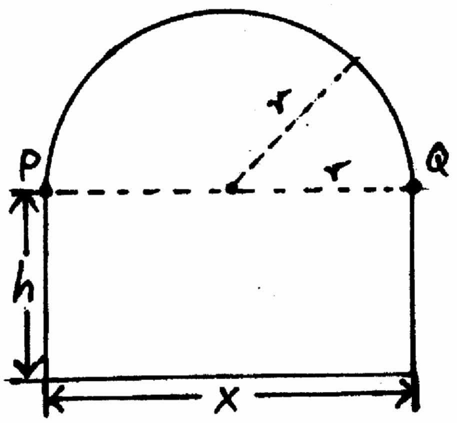
$$= \left[5 \cdot \frac{x^{1,5}}{1,5} - \frac{x^{2,5}}{2,5}\right]_0^5 = \left[\frac{10}{3} \cdot x^{1,5} - 0,4 \cdot x^{2,5}\right]_0^5$$

$$= \frac{10}{3} \cdot 5^{1,5} - 0,4 \cdot 5^{2,5} = \boxed{14,91}$$

Aufgabe 2: (12 Pkt)
Ein Fenster (Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis) hat die Fläche $A = 100\,dm^2$.

(7) a) Stellen Sie den Umfang $U(x)$ des Fensters in Abhängigkeit der Breite x dar ($\overline{PQ}$ gehört **nicht** zum Umfang). Leiten Sie zusätzlich aus der Ungleichung $h > 0$ die obere Begrenzung der Definitionsmenge $D(U)$ der Funktion U her. [**Hinweis:** Stellen Sie zunächst h in Abhängigkeit von x und A dar.]

[**Ergebnis:** $U(x) = x + \frac{2A}{x} + \frac{x\pi}{4}$ mit $D(U) = \left]0; \sqrt{\frac{8A}{\pi}}\right[$]



$$A = hx + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\pi$$

$$A = hx + \frac{x^2\pi}{8}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{x}\left(A - \frac{x^2\pi}{8}\right)$$

$$\boxed{h = \frac{A}{x} - \frac{x\pi}{8}}$$

$$U(x) = x + 2h + \frac{x\pi}{2}$$

$$= x + 2\left(\frac{A}{x} - \frac{x\pi}{8}\right) + \frac{x\pi}{2} = x + \frac{2A}{x} - \frac{x\pi}{4} + \frac{x\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x) = x + \frac{2A}{x} + \frac{x\pi}{4}}$$

Obere Grenze von $D(U)$:

$$h > 0 \Leftrightarrow \frac{A}{x} - \frac{x\pi}{8} > 0 \Leftrightarrow \frac{x\pi}{8} < \frac{A}{x} \quad |$$

$$\Leftrightarrow x^2\pi < 8A \Leftrightarrow x^2 < \frac{8A}{\pi} \quad |\sqrt{}$$

$$\Rightarrow \boxed{x < \sqrt{\frac{8A}{\pi}}} \overset{A=100}{\approx} 15{,}96\,dm$$

zu Afg 2: $U(x) = x + \frac{2A}{x} + \frac{x\pi}{4}$ mit $D(U) = \left]0; \sqrt{\frac{8A}{\pi}}\right[$ $A = 100\,dm^2$

(5) b) Berechnen Sie die Breite x des Fensters so, dass der Umfang $U(x)$ und somit der Materialaufwand für den Rahmen möglichst klein wird?

$U'(x) = 1 - \frac{2A}{x^2} + \frac{\pi}{4}$ ✓ ; $U''(x) = \frac{4A}{x^3} > 0$

$U'(x) = 0 \iff \frac{2A}{x^2} = 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4+\pi}{4}$ ✓

$\iff x^2 = \frac{8A}{4+\pi}$ ✓ $\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{8A}{4+\pi}}}$

speziell für $A = 100 \Rightarrow \boxed{x = 10{,}58\ dm}$ ✓

$U(10{,}58) = 37{,}79\ dm$

Ränder von $D(U)$ prüfen:

$\lim\limits_{x \to 0+} U(x) = \frac{200}{0+} = \infty > 37{,}79$ ✓

$U\left(\sqrt{\frac{800}{\pi}}\right) = 41{,}02 > 37{,}79$.

$\Rightarrow U(x)$ hat bei $x = 10{,}58\ dm$ globales Minimum.

Aufgabe 3: (10 Pkt)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x + \sqrt{\ln x}}{x \ln x}$$

(4) a) Ermitteln Sie eine Stammfunktion F von f durch Substitution $t = \ln x$.
[**Beachte:** $\frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$; **Ergebnis:** $F(x) = \ln x + 2\sqrt{\ln x} + C$]

$$\boxed{t = \ln x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \boxed{dx = x\,dt}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{t + \sqrt{t}}{x \cdot t} \cdot x\,dt = \int \frac{t + \sqrt{t}}{t}\,dt$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = t + 2\sqrt{t}$$

$$\underset{\text{Rücksub.}}{=} \boxed{\ln x + 2\sqrt{\ln x} + C}$$

zu Afg 3: $F(x) = \ln x + 2\sqrt{\ln x} + C$

(6) b) Berechnen Sie $b \in \mathbf{R}$ so, dass $\int_1^b f(x)\mathrm{d}x = 3$ ist.

[**Hinweis:** Setze im Term $F(b)$ zunächst $a = \ln b$ und löse die Wurzelgleichung nach a auf. Führen Sie sodann eine Probe durch!]

$$\int_1^b f(x)\,dx = F(b) - F(1) \qquad \text{da } \ln 1 = 0$$

$$= \ln b + 2\sqrt{\ln b} - 0$$

Setze $a = \ln b \Rightarrow \boxed{a + 2\sqrt{a} = 3}$ Wurzelgleichung

$\Leftrightarrow 2\sqrt{a} = 3 - a \,|^2 \Rightarrow 4a = (3-a)^2$

$\Leftrightarrow 4a = 9 - 6a + a^2 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 = 0$

$$a_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 9 \\ a_2 = 1 \end{array}$$

Probe: $a = 9$: $9 + 2\sqrt{9} = 9 + 6 = 15 \neq 3$ Keine Lösung!

$\boxed{a = 1}$: $1 + 2\sqrt{1} = 1 + 2 = 3$ ok Lösung!

$\Rightarrow \ln b = 1 \,|\exp \Rightarrow \boxed{b = e}$

Aufgabe 4: (13 Pkt)
Zur Finanzierung eines Bauprojektes wird ein Kredit in Höhe von 150.000 € benötigt. Nachfolgend werden verschiedene Rückzahlungsmodalitäten für den Kredit K_0 betrachtet. Dazu sind die Funktionen

$$K(n) = K_0 \cdot a^n \qquad \text{und} \qquad R(n) = \frac{r(a^n - 1)}{i} \qquad \text{mit} \qquad a = 1 + i$$

gegeben, wobei i = Kreditzinssatz pro Jahr ($0 < i < 1$). Hierbei bedeutet:

$K(n)$ = Schuldenstand am Ende des Jahres n, speziell $K_0 = K(0) = 150.000$
$R(n)$ = Kapitalstand am Ende des Jahres n bei n jährlichen Einzahlungsraten r.

(3) a) Berechnen Sie den Zinssatz i bei gesamtfälliger Rückzahlung nach 7 Jahren (d.h. in einem einzigen Betrag) in Höhe von $K(7) = 197.390$ €.

$$K_0 \cdot a^7 = K(7) \Rightarrow a^7 = \frac{K(7)}{K_0} \quad | \sqrt[7]{}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[7]{\frac{197.390}{150.000}} = 1{,}04 \Rightarrow \boxed{i = 4\,\%}$$

Der Kreditzinssatz sei nachfolgend stets $i = 4\,\%$, d.h. $a = 1{,}04$.

(3) b) Berechnen Sie die Kreditlaufzeit n in Jahren, wenn die Rückzahlung gesamtfällig $K(n) = 170.000$ € betragen soll.

$$K = K_0 a^n \Rightarrow a^n = \frac{K}{K_0} \Rightarrow n = \log_a\left(\frac{K}{K_0}\right)$$

$$\Rightarrow n = \log_{1{,}04}\left(\frac{170\,000}{150\,000}\right) = \log_{1{,}04}\left(\frac{17}{15}\right) \simeq \boxed{3{,}19 \text{ Jahre}}$$

zu Afg 4: $K(n) = K_0 \cdot a^n$; $R(n) = \frac{r(a^n - 1)}{i}$; $a = 1 + i = 1{,}04$

(3) c) Die Rückzahlung des Kredits soll jetzt in 10 gleichbleibenden Jahresraten (incl. Zinsen) erfolgen. Berechnen Sie deren Höhe r, wenn die 1. Zahlung ein Jahr nach der Kreditaufnahme beginnt [**Hinweis:** $K(10) = R(10)$].

$$K(10) = R(10) \iff K_0 \cdot a^{10} = \frac{r(a^{10}-1)}{i}$$

$$\Rightarrow r = \frac{K_0 i \cdot a^{10}}{a^{10}-1} = \frac{150.000 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}04^{10}}{1{,}04^{10}-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 18.493{,}64\ €}$$

(4) d) Der Schuldner kann jedoch nur eine jährliche Ratenzahlung in Höhe von $r = 7500\,€$ incl. Zinsen leisten. Die 1. Zahlung soll 2 Jahre nach der Kreditaufnahme beginnen. Berechnen Sie, nach wieviel Jahren n der Kredit incl. Zinsen vollständig zurückgezahlt ist.
[**Hinweis:** Löse die Gleichung $K(n) = R(n-1)$ nach n auf. Setze dazu $x = a^{n-1} \Longrightarrow ax = a^n$ und löse zunächst nach x auf].

$$K(n) = R(n-1) \iff K_0 a^n = \frac{r(a^{n-1}-1)}{i}$$

$$\iff K_0 a x = \frac{r(x-1)}{i} \iff K_0 i a x = r(x-1)$$

$$\iff K_0 i a x = rx - r \iff rx - K_0 i a x = r$$

$$\iff x(r - K_0 i a) = r \Rightarrow x = \frac{r}{r - K_0 i a}$$

da $x = a^{n-1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{n = \log_a\left(\frac{r}{r - K_0 i a}\right) + 1}$

$$\Rightarrow n = \log_{1{,}04}\left(\frac{7500}{7500 - 150.000 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}04}\right) + 1$$

$$n = \log_{1{,}04}\left(\frac{125}{21}\right) + 1 \approx \boxed{46{,}48 \text{ Jahre}}$$

Aufgabe 5: (7 Pkt)
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.
Überprüfen Sie zusätzlich bei b), ob die Reihe $P(\frac{1}{4})$ konvergiert!

(3) a) $P(x) = 1 + 2x + \frac{3x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \ldots$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$ ✓

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n!} : \frac{(n+1)+1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{n+2}$$

$$= \frac{n+1}{\cancel{n!}} \cdot \frac{(n+1)\cancel{n!}}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n+2} \quad ✓$$

$$\Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n+2} \overset{l'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{1} = \infty \quad ✓$$

d.h. $P(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(4) b) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4x)^n}{3n-1}$ **[Hinweis:** Ermittle zunächst a_n]

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{3n-1} \cdot x^n \Rightarrow a_n = (-1)^n \frac{4^n}{3n-1} \quad ✓$$

$$\Rightarrow |a_n| = \frac{4^n}{3n-1} \Rightarrow |a_{n+1}| = \frac{4^{n+1}}{3(n+1)-1} = \frac{4^{n+1}}{3n+2}$$

Daraus

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{4^n}{3n-1} : \frac{4^{n+1}}{3n+2} = \frac{\cancel{4^n}}{3n-1} \cdot \frac{3n+2}{4 \cdot \cancel{4^n}} = \frac{3n+2}{4(3n-1)} \quad ✓$$

$$\Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4(3n-1)} \overset{l'H}{=} \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad ✓$$

$$P(\tfrac{1}{4}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4 \cdot \frac{1}{4})^n}{3n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1} \quad ✓$$

Die Folge $\frac{1}{3n-1}$ ist monoton fallend, daher $P(\frac{1}{4})$ als alternierende Reihe nach dem Leibnitz-Kriterium konvergent.