Klausur Mathematik I - Bau SS 2013

**Aufgabe 1:** (24 Pkt)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{6-3x}{2x+8}\right)$$

(3) a) Ermitteln Sie für die obige Funktion $f$ den Definitionsbereich und die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

$$\frac{6-3x}{2x+8} > 0 \iff \frac{(+)}{(+)} \vee \frac{(-)}{(-)}$$

<u>1. Fall:</u> $6-3x > 0 \wedge 2x+8 > 0$

$6 > 3x \wedge 2x > -8$

$x < 2 \wedge x > -4 \Rightarrow -4 < x < 2$

<u>2. Fall:</u> $6-3x < 0 \wedge 2x+8 < 0$

$x > 2 \wedge x < -4$ ↯ geht nicht!

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{D} = ]-4;2[}$ ✓

<u>Schnitt mit y-Achse:</u> $f(0) = \ln\left(\frac{6}{8}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0{,}29$ ✓

$\Rightarrow \boxed{S_y(0 \mid \ln 0{,}75)}$

<u>Schnitt mit x-Achse:</u>

$f(x) = 0 \iff \frac{6-3x}{2x+8} = 1 \iff 6-3x = 2x+8$

$\iff 5x = -2 \iff x = -0{,}4 \Rightarrow \boxed{S_x(-0{,}4 \mid 0)}$ ✓

(2) b) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von $f(x)$ an den Rändern des Definitionsbereichs.

$$\lim_{x\to -4+} f(x) = \ln\left(\frac{18}{0+}\right) = \ln(\infty) = \infty \quad ✓$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \ln\left(\frac{0+}{12}\right) = \ln(0+) = -\infty \quad ✓$$

**zu Aufgabe 1:** $f(x) = \ln\left(\dfrac{6-3x}{2x+8}\right)$

(10) c) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{\cancel{(2x+8)}}{6-3x} \cdot \frac{-3(2x+8)-2(6-3x)}{(2x+8)^{\cancel{2}\,1}}$$

$$= \frac{1}{6-3x} \cdot \frac{\cancel{-6x}-24-12+\cancel{6x}}{2x+8}$$

$$= \frac{1}{3(2-x)} \cdot \frac{-36}{2(x+4)}$$

$$= \frac{-6}{(2-x)(x+4)} = \frac{6}{(x-2)(x+4)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{6}{x^2+2x-8}} = 6(x^2+2x-8)^{-1}$$

$$f''(x) = -6(x^2+2x-8)^{-2} \cdot (2x+2)$$

$$= -\frac{6(2x+2)}{(x^2+2x-8)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) = -\frac{12(x+1)}{(x^2+2x-8)^2}}$$

[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{6}{x^2+2x-8}$]

**zu Aufgabe 1:** $f(x) = \ln\left(\frac{6-3x}{2x+8}\right)$; $f'(x) = \frac{6}{(x-2)(x+4)}$

(5) **d)** Stellen Sie die Gleichung der Tangente $t$ auf, die den Graphen von $f$ berührt und zur Geraden $g(x) = 5 - \frac{2x}{3}$ parallel verläuft.

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \iff \frac{6}{x^2+2x-8} = -\frac{2}{3} \checkmark$$

$$\iff 18 = -2(x^2+2x-8) \quad | : (-2)$$

$$\iff -9 = x^2+2x-8 \checkmark$$

$$\iff x^2+2x+1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -1} \checkmark \Rightarrow f(-1) = \ln\left(\frac{9}{6}\right) = \ln 1{,}5$$

$$\Rightarrow t(x) = -\frac{2}{3}(x+1) + \ln 1{,}5 \checkmark$$

$$t(x) = \boxed{-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \ln 1{,}5} \approx -\frac{2}{3}x - 0{,}26 \checkmark$$

(4) **e)** Untersuchen Sie $f$ auf lokale Extrema sowie das Monotonie- und Krümmungsverhalten.

$f'(x) \neq 0 \Rightarrow$ Es gibt keine lokalen Extrema ✓

$$x \in \mathbb{D} \Rightarrow x > -4 \wedge x < 2$$

$$\iff x+4 > 0 \wedge x-2 < 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6}{(x-2)(x+4)} = \frac{6}{(-)\cdot(+)} < 0$$

$\Rightarrow f$ ist smf auf ganz $\mathbb{D}$ ✓

$$f''(x) > 0 \iff x+1 < 0 \iff x < -1$$

$$\Rightarrow f''(x) < 0 \iff x > -1$$

$\Rightarrow f$ ist $\begin{cases} \text{linksgekrümmt für } x < -1 \\ \text{rechtsgekrümmt für } x > -1 \end{cases}$ ✓

**Aufgabe 2:** (4 Pkt)
Aus einem zylindrischen Baumstamm mit einem Durchmesser von $d = 30cm$ soll ein rechteckiger Balken mit möglichst großer Tragfähigkeit ausgesägt werden. Ermitteln Sie die Höhe $x$ des Balkens so, dass sein Flächenmoment

$$I(x) = \frac{x^3 \cdot \sqrt{d^2 - x^2}}{12} \qquad \text{mit} \qquad 0 < x < d$$

den absolut größten Wert annimmt, und geben Sie das maximale Flächenmoment an.

$$I'(x) = \frac{1}{12}\left(3x^2\sqrt{d^2-x^2} + x^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{d^2-x^2}}\right) \checkmark$$

$$= \frac{1}{12}\left(3x^2\sqrt{d^2-x^2} - \frac{x^4}{\sqrt{d^2-x^2}}\right)$$

$$= \frac{x^2}{12}\left(3\sqrt{d^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}\right) \checkmark$$

$$= \frac{x^2}{12} \cdot \frac{3(d^2-x^2) - x^2}{\sqrt{d^2-x^2}} \Longrightarrow \boxed{I'(x) = \frac{x^2}{12} \cdot \frac{3d^2-4x^2}{\sqrt{d^2-x^2}}}$$

$$I'(x) = 0 \iff 3d^2 - 4x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{3d^2}{4}$$

$$\Longrightarrow x^* = \frac{\sqrt{3}\,d}{2} = 15\sqrt{3} \approx 26\,cm \checkmark$$

Wegen $\lim\limits_{x \to 0} I(x) = 0 = \lim\limits_{x \to d} I(x)$ ist $I(x^*) = 21.921{,}27\ cm^4$ globales Maximum. ✓

Bei ca. $x = 26\,cm$ hat der Balken maximale Tragfähigkeit!

**Aufgabe 3:** (10 Pkt)
Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = 2 - (x-1)^2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{2}{2x-1}$$

Ermitteln Sie die positiven Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$. Berechnen Sie sodann den Inhalt der Fläche $A$, die von den Graphen von $f$ und $g$ eingeschlossen wird.
[**Teilergebnis:** Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$ bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 2,19$]

Schnittstellen von f und g berechnen:

$$2-(x-1)^2 = \frac{2}{2x-1} \iff 2-x^2+2x-1 = \frac{2}{2x-1}$$

$$\iff (2x-1)(1-x^2+2x) = 2$$

$$\iff \cancel{2x} - 2x^3 + 4x^2 - 1 + x^2 \cancel{-2x} = 2$$

$$\iff 5x^2 - 2x^3 - 1 = 2$$

$$\iff 2x^3 - 5x^2 + 3 = 0$$

1. NS $\boxed{x_1 = 1}$

| | 2 | -5 | 0 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | -3 | -3 |
| Σ | 2 | -3 | -3 | 0 |

$$2x^2 - 3x - 3 = 0 \implies x_2 = \frac{3+\sqrt{9+24}}{4} = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$$

$$\boxed{x_2 \approx 2,19}$$

Berechnung der Fläche:

$$A = \int_1^{2,19} (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^{2,19} \left(2-(x-1)^2 - \frac{2}{2x-1}\right) dx$$

$$= \left[2x - \frac{(x-1)^3}{3} - \ln|2x-1|\right]_1^{2,19}$$

$$\approx 2,6 - 2 = \boxed{0,6 \text{ FE}}$$

**Aufgabe 4:** (12 Pkt)
Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \qquad \text{[5 Stellen hinter dem Komma genau]}$$

(3) a) analytisch mit Hilfe einer Stammfunktion (substituiere $t = 1 + \sqrt{x}$).

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{dx = 2\sqrt{x}\, dt} \qquad \sqrt{x} = t-1$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2\sqrt{x}\, dt}{t} = 2\int \frac{t-1}{t}\, dt$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = 2(t - \ln t)$$

$$= 2\left(1+\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2(1+2-\ln(1+2)) - 2(1-\underbrace{\ln 1}_{=0})$$

$$= 6 - 2\ln 3 - 2 = \boxed{4 - 2\ln 3} \approx \boxed{1{,}80278}$$

(8) b) numerisch mit Hilfe der Trapezformel durch Zerlegung des Integrationsintervalls in 5 Teilintervalle.

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \approx \left(\frac{y_0+y_5}{2} + \sum_{i=1}^{4} y_i\right) \cdot \frac{4-0}{5} \quad \text{mit } y_i = \frac{1}{1+\sqrt{0{,}8i}}$$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 0,5278 | 0,4415 | 0,3922 | 0,3585 | 0,3333 |

$$\Rightarrow \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \approx \left(\frac{1{,}3333}{2} + \sum_{i=1}^{4} y_i\right) \cdot 0{,}8 = \boxed{1{,}90932}$$

(1) c) Um wieviel % weicht die numerische von der analytischen Lösung ab?

$$\%\text{-Abweichung} = \frac{1{,}90932 - 1{,}80278}{1{,}80278} = \boxed{5{,}91\,\%}$$

**Aufgabe 5:** (4 Pkt)

Der Kurvenverlauf eines Straßenabschnittes kann durch die Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{16x^3}}{9}$$

beschrieben werden. Berechnen Sie die Bogenlänge des Kurvenabschnittes im Intervall $[0;5]$ mit Hilfe der Formel

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

$$f(x) = \frac{4}{9} \cdot x^{\frac{3}{2}} ✓ \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x} ✓$$

$$\Rightarrow 1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{4}{9}x$$

$$L(f) = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x}\, dx = \int_0^5 \left(1 + \frac{4}{9}x\right)^{1/2} dx ✓$$

$$= \left[\frac{9}{4} \cdot \frac{\left(1+\frac{4}{9}x\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^5 = \left[\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{4}{9}x\right)^{3/2}\right]_0^5$$

$$= \left[\frac{3}{2}\left(1 + \frac{4}{9}x\right)^{3/2}\right]_0^5 = 1{,}5\left(1 + \frac{20}{9}\right)^{1{,}5} - 1{,}5$$

$$\approx \boxed{7{,}176 \text{ LE}} ✓$$

**Aufgabe 6:** ( 6 Pkt)
**Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen**

(3) a) $P(x) = \frac{x}{2!} + \frac{2x^2}{3!} + \frac{3x^3}{4!} + \frac{4x^4}{5!} + \ldots \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^n$

$$a_n = \frac{n}{(n+1)!} \quad ✓$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)!}{n+1} = \frac{n}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{(n+2)\cancel{(n+1)!}}{n+1}$$

$$= \frac{n(n+2)}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \overset{:n}{\underset{:n}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{1+\frac{1}{n}} = \infty \quad ✓$$

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich $= ]-\infty, \infty[ \; = \mathbb{R}$ ✓

d.h. $P(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) b) $P(x) = 1 - x + \frac{5x^2}{9} - \frac{7x^3}{27} + \frac{9x^4}{81} - \frac{11x^5}{243} + \ldots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3^n} \cdot x^n$

$$a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{3^n} \Rightarrow |a_n| = \frac{2n+1}{3^n} \quad ✓$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2n+1}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{2(n+1)+1} = \frac{2n+1}{\cancel{3^n}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{3^n}}{2n+3} = \frac{3(2n+1)}{2n+3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \overset{:n}{\underset{:n}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{3(2+\frac{1}{n})}{2+\frac{3}{n}} = \frac{3(2+0)}{2+0} = 3 \quad ✓$$

$P(x)$ konvergiert zunächst für $|x| < 3$

Probe für $|x| = 3$:

$$x = 3 \Rightarrow P(3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3^n} \cdot 3^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)$$

✓

$$x = -3 \Rightarrow P(-3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3^n} \cdot (-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+1)$$

Für beide Reihen ist die Summandenfolge keine Nullfolge, daher nicht konvergent.

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich $= ]-3; 3[$