Klausur Bau-Mathe II SS 2012

Aufgabe 1: (8 Pkt)
Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z = \frac{5(i-a)}{1+2i} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

(5) a) Bestimmen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ und $|z|$ in Abhängigkeit von a.

$$z = \frac{5(i-a)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \checkmark = \frac{5(i-2i^2-a+2ai)}{1-4i^2} \checkmark$$

$$= \frac{5(i+2-a+2ai)}{5} = (2-a)+(2a+1)i \checkmark$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{Re}(z) = 2-a} \, ; \, \boxed{\mathrm{Im}(z) = 2a+1}$$

$$|z|^2 = (2-a)^2+(2a+1)^2 = 4-\cancel{4a}+a^2+4a^2+\cancel{4a}+1 \checkmark$$

$$= 5a^2+5 \quad \Longrightarrow \boxed{|z| = \sqrt{5a^2+5}} \checkmark$$

(3) b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $|z| = 5$? Wie lauten in diesem Fall die komplexen Zahlen z in kartesischer Form?

$$|z| = 5 \iff 5a^2+5 = 25 \checkmark$$

$$\iff 5a^2 = 20 \iff a^2 = 4$$

$$\boxed{a_1 = 2} \, ; \, \boxed{a_2 = -2} \checkmark$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_1 = 5i} \quad ; \quad \boxed{z_2 = 4-3i} \checkmark$$

Aufgabe 2: (15 Pkt)
Gegeben sind die folgenden Matrizen bzw. Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -3 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \; \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 41 \\ -28 \end{pmatrix}, \; \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie die Matrizengleichung

$$A(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{b} - 2\vec{x}$$

nach $\vec{x}$ auf. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(5) a) Bringen Sie obige Matrizengleichung **ohne** Verwendung konkreter Zahlenwerte zunächst auf die Form $B\vec{x} = \vec{c}$. Berechnen Sie sodann die 3x3-Matrix B und den 3x1-Vektor $\vec{c}$ mit konkreten Zahlenwerten.

$$A(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{b} - 2\vec{x} \iff A\vec{x} - A\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{x}$$

$$\iff A\vec{x} + 2\vec{x} = A\vec{a} + \vec{b} \quad ✓$$

$$\iff \boxed{(A + 2E_3)\vec{x} = A\vec{a} + \vec{b}} \quad ✓$$

$$B = A + 2E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -3 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ✓$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{c} = A\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -3 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 41 \\ -28 \end{pmatrix} \quad ✓$$

$$= \begin{pmatrix} -14 \\ -21 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 41 \\ -28 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ -13 \end{pmatrix} = \vec{c}} \quad ✓$$

zu Aufgabe 2: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ -13 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(5) b) Lösen Sie das in a) dargestellte lineare Gleichungssystem $B\vec{x} = \vec{c}$ nach $\vec{x}$ auf. Die inverse Matrix von B darf für diese Teilaufgabe **nicht** verwendet werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 \\ -3 & 6 & -4 & 20 \\ 4 & -2 & 1 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[4I - III]{3I + II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 15 & -19 & 26 \\ 0 & 14 & -21 & 21 \end{array}\right) \checkmark$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7} III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 15 & -19 & 26 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right) \checkmark \xrightarrow{2 II - 15 III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 15 & -19 & 26 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \checkmark$$

III $\quad 7x_3 = 7 \iff \boxed{x_3 = 1}$ ✓

II $\quad 15x_2 - 19 = 26 \iff \boxed{x_2 = 3}$ ✓

I $\quad x_1 + 9 - 5 = 2 \iff \boxed{x_1 = -2}$

zu Aufgabe 2: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ -13 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(5) c) Es ist $B^{-1} = \dfrac{1}{49} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 18 \\ -13 & 21 & 19 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ die inverse Matrix von B.

Vervollständigen Sie die 3. Zeile der Matrix B^{-1} mit Hilfe der Cramerschen Formel $b_{ij} = (-1)^{i+j}\det(B_{ji})$ für inverse Matrizen und lösen Sie das lineare Gleichungssystem $B\vec{x} = \vec{c}$ jetzt mit Hilfe von B^{-1}.

$$b_{31} = (-1)^{3+1} \det(B_{13}) = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 24 = -18 \quad \checkmark$$

$$b_{32} = (-1)^{3+2} \det(B_{23}) = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-12) = 14 \quad \checkmark$$

$$b_{33} = (-1)^{3+3} \det(B_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 9 = 15 \quad \checkmark$$

$$B\vec{x} = \vec{c} \iff \vec{x} = B^{-1}\vec{c}$$

$$\checkmark$$

$$\vec{x} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 18 \\ -13 & 21 & 19 \\ -18 & 14 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -98 \\ 147 \\ 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -2 \ ; \quad x_2 = 3 \ ; \quad x_3 = 1 \ \checkmark$$

Aufgabe 3: (8 Pkt)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

$$0 = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 \\ 9 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-4-\lambda)(2-\lambda) - 27 = -8 + 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 27$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 35 = 0 \quad ✓$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 35}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} \quad ✓$$

$$\boxed{\lambda_1 = 5} \; ; \; \boxed{\lambda_2 = -7}$$

(6) b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A.

zu $\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$ ✓

$II: \; 9x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow 3x_1 - x_2 = 0$ ✓

wähle $x_1 = \alpha \Rightarrow x_2 = 3\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Eig}(A, 5) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}} \quad ✓$$

zu $\lambda = -7$: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$ ✓

$I \quad 3x_1 + 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ ✓

wähle $x_1 = \alpha \Rightarrow x_2 = -\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Eig}(A, -7) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}} \quad ✓$$

Aufgabe 4: (20Pkt)

(10) **a)** Lösen Sie unter Verwendung einer geeigneten Substitution das Anfangswertproblem

$$y' - \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}} \qquad \text{mit} \qquad y(e) = e^2$$

Substituiere: $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y' - z = \sqrt{z}$ ✓

$y' = z + \sqrt{z}$

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} \overset{:x}{\underset{:x}{=}} \frac{y' - \frac{y}{x}}{x} \checkmark$$

$$= \frac{z + \sqrt{z} - z}{x} = \frac{\sqrt{z}}{x} \checkmark$$

Somit

$$z' = \frac{\sqrt{z}}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{z}}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int \frac{dx}{x} \checkmark$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{z} = \ln|x| + C \checkmark \quad |:2$$

$$\sqrt{z} = \frac{\ln|x| + C}{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = z = \left(\frac{\ln|x| + C}{2}\right)^2 \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x\left(\frac{\ln|x| + C}{2}\right)^2} \checkmark \text{ oder } \boxed{y = 0}$$

allg. Lösung $C \in \mathbb{R}$

$$e^2 = y(e) = e\left(\frac{\ln e + C}{2}\right)^2 = e\left(\frac{1 + C}{2}\right)^2 \checkmark$$

$$\Leftrightarrow e = \left(\frac{1+C}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1+C}{2} = \pm\sqrt{e} \checkmark$$

$$\Leftrightarrow C = \pm 2\sqrt{e} - 1 \checkmark$$

Spezielle Lsg:

$$\boxed{y = x\left(\frac{\ln|x| \pm 2\sqrt{e} - 1}{2}\right)^2}$$

zu Aufgabe 4:

(10) b) Lösen Sie unter Verwendung eines geeigneten partikulären Ansatzes die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 2y' + 26y = 338x^2 - 4$$

Homogener Fall: $y'' - 2y' + 26y = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 26 = 0 \quad ✓$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 26}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-100}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 10i}{2} = 1 \pm 5i \,, \quad \alpha = 1,\ \omega = 5 \quad ✓$$

homogene Lsg $y_0 = e^x(C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x)$ ✓, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

inhomogener Fall: da $g(x) = 338x^2 - 4 \Rightarrow y_p = ax^2 + bx + c$

$$\Rightarrow y_p' = 2ax + b \,; \quad y_p'' = 2a \quad ✓$$

in Diffgl eingesetzt: $y_p'' - 2y_p' + 26y_p = 338x^2 - 4$

$$2a - 2(2ax + b) + 26(ax^2 + bx + c) = 338x^2 - 4 \quad ✓$$

$$26ax^2 + (-4a + 26b)x + (2a - 2b + 26c) = 338x^2 - 4 \quad ✓$$

Koeffvgl. ergibt ✓

$$\left.\begin{array}{llll} \text{I} & 26a = 338 & \Leftrightarrow & a = 13 \\ \text{II} & -4a + 26b = 0 & \Leftrightarrow & b = 2 \\ \text{III} & 2a - 2b + 26c = -4 & \Leftrightarrow & c = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow y_p = 13x^2 + 2x - 1 \quad ✓$$

allg. Lsg: $y = y_0 + y_p$

$$\boxed{y = e^x(C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x) + 13x^2 + 2x - 1} \quad ✓$$

Aufgabe 5: (14 Pkt)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 16x^3 + 3xy - 2(y+1)^3 + 3x$$

(8) **a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrem- und Sattelpunkte.**

$f_x = 48x^2 + 3y + 3$; $f_y = 3x - 6(y+1)^2$

$f_{xx} = 96x$; $f_{yy} = -12(y+1)$; $f_{xy} = 3 = f_{yx}$

I $\quad 16x^2 + y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -16x^2 - 1$

II $\quad x - 2(y+1)^2 = 0$

I in II : $\quad 0 = x - 2(-16x^2)^2 = x - 512x^4$

$\Leftrightarrow x(1 - 512x^3) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 0} \Rightarrow \boxed{y_1 = -1}$

$\boxed{P_1(0|-1)}$

$0 = 1 - 512x^3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{512} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{8} \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \boxed{P_2\left(\frac{1}{8}\middle|-\frac{5}{4}\right)}$

$Hf(P_1) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$\boxed{S(0|-1|0)}$

$Hf(P_2) = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0 \Rightarrow$ lok. Extr.

da $f_{xx} = 12 > 0 \Rightarrow$ lok Minimum $\boxed{T\left(\frac{1}{8}\middle|-\frac{5}{4}\middle|-\frac{1}{32}\right)}$

zu Aufgabe 5: $f(x,y) = 16x^3 + 3xy - 2(y+1)^3 + 3x$

(2) b) Zeigen Sie, dass f keine globalen Extrema besitzt.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \lim_{x \to \pm\infty} (16x^3 + 3x - 2) = \pm\infty$$ ✓ ✓

$\Rightarrow$ Werte $f(x,y)$ können $\pm\infty$ werden

$\Rightarrow$ Es gibt keine globalen Extrema

(4) c) Berechnen Sie die Steigung von $f(x,y)$ im Punkt $P(1|-2)$ in der Richtung die von P nach $Q(5|1)$ führt (sog. Richtungsableitung).

$f_x(P) = 48 - 6 + 3 = 45$ ✓

$f_y(P) = 3 - 6 = -3$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{16+9} = 5$$ ✓

$$f_{\vec{v}}(P) = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \nabla f(P) \circ \vec{v}$$ ✓

$$= \frac{1}{5} \cdot (45; -3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{45 \cdot 4 - 9}{5} = \frac{171}{5}$$

$= 34{,}2$ ✓

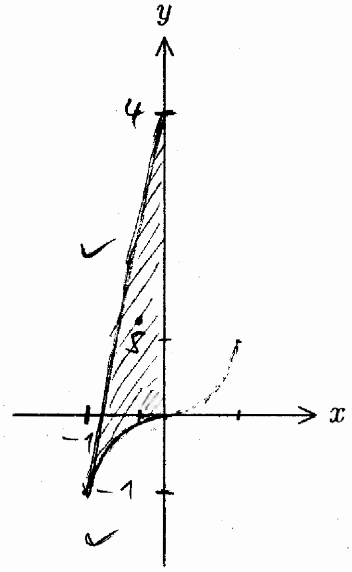
Aufgabe 6: (15 Pkt)

Gegeben ist das Flächenstück

$$A = \Big\{(x|y) \in \mathbb{R}^2 \Big| -1 \le x \le 0,\ \ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\Big\}$$

mit den Randkurven $\alpha(x) = x^3$ und $\beta(x) = 8 - (x-2)^2$. $= -x^2 + 4x + 4$

(2) a) Skizzieren Sie das Flächenstück A in der xy-Ebene.



(3) b) Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Flächeninhalts von A genau $\frac{23}{12}$ beträgt.

$$A = \int_{-1}^{0} \big(\beta(x) - \alpha(x)\big)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(-x^3 - x^2 + 4x + 4\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right]_{-1}^{0} = -\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 2 - 4\right) = \frac{23}{12}$$

zu Aufgabe 6: $\alpha(x) = x^3$ und $\beta(x) = 8 - (x-2)^2$ mit $-1 \le x \le 0$

(10) c) Berechnen Sie die Koordinaten des Flächenschwerpunkts $S(x_S|y_S)$ der Fläche A mit Hilfe der Formeln

$$x_S = \frac{1}{A}\iint_A x\,dA \qquad \text{und} \qquad y_S = \frac{1}{A}\iint_A y\,dA$$

Hinweis:
Für die Berechnung von y_S bitte **nichts** ausmultiplizieren! Verwenden Sie hierfür

$\beta^2(x) = (x-2)^4 - 16(x-2)^2 + 64$ und $\int (x-2)^n\,dx = \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$.

(5)

$$x_S = \frac{1}{A}\int_{-1}^{0} x\left(\beta(x) - \alpha(x)\right)dx = \frac{12}{23}\int_{-1}^{0} x\left(-x^3 - x^2 + 4x + 4\right)dx$$

$$= \frac{12}{23}\int_{-1}^{0}\left(-x^4 - x^3 + 4x^2 + 4x\right)dx$$

$$= \frac{12}{23}\left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$= -\frac{12}{23}\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2\right) = -\frac{12}{23}\cdot\frac{37}{60} = -\frac{37}{115} \approx -0{,}32$$

(5)

$$y_S = \frac{1}{2A}\int_{-1}^{0}\left(\beta^2(x) - \alpha^2(x)\right)dx$$

$$= \frac{6}{23}\int_{-1}^{0}\left((x-2)^4 - 16(x-2)^2 + 64 - x^6\right)dx$$

$$= \frac{6}{23}\left[\frac{(x-2)^5}{5} - \frac{16(x-2)^3}{3} + 64x - \frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{6}{23}\left(\frac{544}{15} - \frac{1104}{35}\right) = \frac{6}{23}\cdot\frac{496}{105} = \frac{992}{805} \approx 1{,}23$$

$\Longrightarrow$ Schwerpunkt $\boxed{S(-0{,}32 \,|\, 1{,}23)}$

Σ 80 Pkt