10 P.

Aufgabe 1:

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & tx_3 & = & -7 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -11 \end{array}$$

(6) a) Unter welcher Bedingung an den reellen Parameter t ist das obige Gleichungssystem nicht lösbar?
Hinweis: Bringen Sie das Gleichungssystem in Abhängigkeit von t auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & t & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[3I-III]{2I+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & t & -7 \\ 0 & -5 & 2t-5 & -12 \\ 0 & -7 & 3t-1 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{7II-5III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & t & -7 \\ 0 & -5 & 2t-5 & -12 \\ 0 & 0 & -t-30 & -34 \end{array}\right)$$

$\underline{III}$ $\quad -(t+30)x_3 = -34$

falls $t = -30$ ist LGS nicht lösbar!

(4) b) Jetzt sei $t = 4$.
Ermitteln Sie für diesen konkreten Fall die Lösung des obigen Gleichungssystems unter Verwendung von a).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & -5 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -34 & -34 \end{array}\right)$$

$\underline{III}$: $-34x_3 = -34$

$\boxed{x_3 = 1}$

in $\underline{II}$: $-5x_2 + 3x_3 = -12$

$-5x_2 + 3 = -12 \iff 5x_2 = 15$

$\boxed{x_2 = 3}$

in $\underline{I}$: $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7$

$x_1 - 9 + 4 = -7 \iff \boxed{x_1 = -2}$

-8 P.

Aufgabe 2:
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) **a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.**

$$0 = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda) - 12 = -3 - 2\lambda + \lambda^2 - 12$$

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda - 15$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

EW: $\boxed{\lambda_1 = 5}$; $\boxed{\lambda_2 = -3}$

(6) **b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A.**

<u>zu $\lambda = 5$</u>

$$(A - 5E_2)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$I: -2x_1 + 6x_2 = 0 \iff -x_1 + 3x_2 = 0$

Wähle: $\boxed{x_2 = \alpha} \Rightarrow \boxed{x_1 = 3\alpha}$

$$\Rightarrow Eig(A; 5) = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

<u>zu $\lambda = -3$</u>

$$(A + 3E_2)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$II\ 2x_1 + 2x_2 = 0$; wähle $\boxed{x_2 = \alpha} \Rightarrow \boxed{x_1 = -\alpha}$

$$\Rightarrow Eig(A; -3) = \left\{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

6 P. **Aufgabe 3:**

Gegeben ist die Differentialgleichung $y' + 1 = \frac{2x}{e^{y+x}}$.

(4) a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der Substitution $z = y + x$.

Setze $z = y + x \Rightarrow z' = y' + 1 = \frac{2x}{e^z}$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{2x}{e^z} \quad \text{(Variablentrennung)}$$

$$\Leftrightarrow \int e^z \, dz = \int 2x \, dx + C_1$$

$$e^z = x^2 + C_1 \quad | \ln$$

$$y + x = z = \ln(x^2 + C_1) \Leftrightarrow \boxed{y = \ln(x^2 + C_1) - x}$$

mit $C_1 \in \mathbb{R}$

allgemeine Lösung

(2) b) Berechnen Sie die spezielle Lösung für $y(0) = 1$.

[Ergebnis aus a) $y = \ln(x^2 + C) - x$].

$$1 = y(0) = \ln(0 + C_1) - 0 = \ln(C_1) \quad | \exp$$

$$C_1 = e^1 = e$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \ln(x^2 + e) - x}$$

spezielle Lösung

Aufgabe 4:

10 P. 4a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichung:

$y' = 2xy - e^{x^2} \sin x$ (durch Variation der Konstanten)

homogener Fall: $y' = 2xy \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy$

Variablentrennung: $\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx + c_1$

(I)

$\ln|y| = x^2 + c_1 \Leftrightarrow |y| = e^{c_1} e^{x^2}$

$\Rightarrow y = k e^{x^2}$ mit $k \in \mathbb{R}$

Variation der Konstanten $y = k(x) e^{x^2}$

eingesetzt in die Dglg. $y' = 2xy - e^{x^2} \sin x$ ergibt

$2xy - e^{x^2}\sin x = y' = k'(x) e^{x^2} + 2x\, k(x) e^{x^2}$

(7) $2xy - e^{x^2}\sin x = k'(x) e^{x^2} + 2xy \quad | -2xy$

$-e^{x^2}\sin x = k'(x) e^{x^2} \quad | : e^{x^2}$

$k'(x) = -\sin x \Rightarrow k(x) = \cos x + c_1$

$\Rightarrow \boxed{y = (\cos x + c_1) e^{x^2}} ; c_1 \in \mathbb{R}$

allg. Lösung

6P. 4b) **Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung**

$$y'' + y' - 2y = 2e^{-x}$$

<u>homog. Fall:</u> $y'' + y' - 2y = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ (char. Gleichung)

$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$ (faktorisiert)

(2)

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 ; \lambda_2 = -2$

$\boxed{y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}}$ homogene Lösung

<u>inhomog. Fall:</u> $g(x) = 2e^{-x}$ und -1 keine Lösung der char. Gl. $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow y_p = Ae^{-x} ; y_p' = -Ae^{-x} ; y_p'' = Ae^{-x}$

eingesetzt in DGl:

(4)

$2e^{-x} = y_p'' + y_p' - 2y_p$

$= Ae^{-x} - Ae^{-x} - 2Ae^{-x} = -2Ae^{-x}$

also $2e^{-x} = -2Ae^{-x} \mid \cdot \left(\frac{e^{x}}{2}\right) \Leftrightarrow A = -1$

$\Rightarrow \boxed{y_p = -e^{-x}}$

$\Rightarrow \boxed{y = y_0 + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - e^{-x}}$

allg. Lösung, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

10P: **Aufgabe 5:**
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - 9(xy + y^3)$$

(8) **a) Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema und Sattelpunkte von f.**

(1) $f_x = x^2 - 9y \quad ; \quad f_y = -9(x + 3y^2)$

$f_{xx} = 2x \quad ; \quad f_{yy} = -54y \ / \ f_{xy} = -9 = f_{yx}$

$\mathrm{I} \quad x^2 - 9y = 0 \quad ; \quad \mathrm{II} \quad -9(x+3y^2) = 0$

$x = -3y^2$

(3) in I: $(-3y^2)^2 - 9y = 0 \iff 9y^4 - 9y = 0$

$\iff y(y^3 - 1) = 0$

$y_1 = 0 \implies x_1 = 0 \implies P_1(0/0)$

$y_2 = 1 \implies x_2 = -3 \implies P_2(-3/1)$

(2) $H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \implies \Delta(P_1) = -81 < 0$

$\implies f$ hat Sattelpunkt $\boxed{S(0/0/0)}$

$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -9 & -54 \end{pmatrix} \implies \Delta(P_2) = 6 \cdot 54 - 81 > 0$

wegen $f_{xx}(P_2) = -6 < 0 \implies$ lok. Max $\boxed{H(-3/1/9)}$

$f(-3/1) = -9 - 9(-3+1) = -9 + 18 = 9$

(2) **b) Zeigen Sie, dass f keine globalen Extrema besitzt.**

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x,0) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{3} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$

$\implies f$ hat keine globalen Extrema

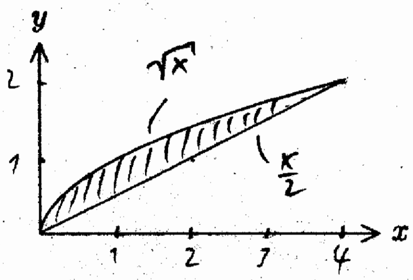
10 P. **Aufgabe 6:**

Das Volumen V eines zylindrischen Körpers wird beschrieben durch die Formel

$$V = \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{y^2}\, dy\, dx$$

mit dem Integrationsbereich A als Boden und dem Graphen des Integranden als Deckel.

(2) a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich A in der xy-Ebene.



(8) b) Berechnen Sie das Volumen V.

inneres Integral:

$$\int_{x/2}^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{y^2}\, dy = \sqrt{x}\int_{x/2}^{\sqrt{x}} y^{-2}\, dy = -\sqrt{x}\left[\frac{1}{y}\right]_{x/2}^{\sqrt{x}}$$

$$= -\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\right) = -1 + \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \qquad (4)$$

äußeres Integral:

$$V = \int_0^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int_0^4 \left(2\cdot x^{-\frac{1}{2}} - 1\right) dx$$

$$= \left[2\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2} - x\right]_0^4 = \left[4\sqrt{x} - x\right]_0^4$$

$$= 4\sqrt{4} - 4 = 4\cdot 2 - 4 = 4 \qquad (4)$$