26P. **Aufgabe 1:**
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$$

(5) **a)** Ermitteln Sie für die obige Funktion f den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.
Stellen Sie $f(x)$ in der Form $f(x) = p(x) + \frac{c}{x-1}$ mit einem Polynom $p(x)$ und einer Konstanten c dar.

(1) max. Def.bereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0$

$\boxed{x_1 = 0}$ (1) ; $\boxed{x_2 = -3}$ (1)

	1	3	0
1	0	1	4
Σ	1	4	4

$\Rightarrow \boxed{f(x) = x + 4 + \frac{4}{x-1}}$ (2)

(4) **b)** Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von $f(x)$ für $|x| \longrightarrow \infty$ und an den Polstellen. Stellen Sie alle Asymptotengleichungen auf.

(1) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(x + 4 + \frac{4}{x-1}\right) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(1) $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \left(\frac{x^2+3x}{x-1}\right) = \frac{4}{0+} = \infty$

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \frac{4}{0-} = -\infty$

(1) Vertikale Asymp.: $\boxed{x = 1}$; schiefe Asymp.: $\boxed{y = x + 4}$ (1)

(6) **zu Aufgabe 1:** $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$

c) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x)}{(x-1)^2}$$

(3)
$$= \frac{2x^2+x-3-x^2-3x}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}$$

(3)
$$= \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x+6}{(x-1)^3}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}}$$

[Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ und $f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}$]

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}; \quad f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; \quad f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}\right]$

(4) d) Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema von f.

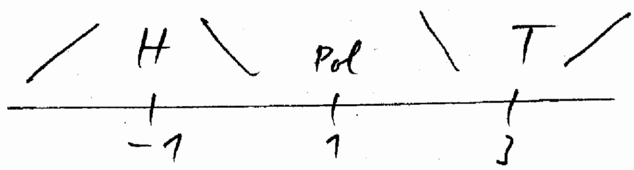
$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\iff (x+1)(x-3) = 0$$
$$\boxed{x_1 = -1}\,; \quad \boxed{x_2 = 3}$$

$f''(-1) = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \Rightarrow$ lok. Max $\boxed{H(-1|1)}$ (2)

$f''(3) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow$ lok. Min $\boxed{T(3|9)}$ (2)

(3) e) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten von f.

(2) Monotonie



f ist $\begin{cases} \text{mon. steigend für } x < -1 \lor x > 3 \\ \text{mon. fallend für } -1 < x < 3\,;\, x \neq 1 \end{cases}$

(1) Krümmung

$f''(x) \begin{cases} > 0 \text{ für } x > 1 \text{ (linksgekrümmt)} \\ < 0 \text{ für } x < 1 \text{ (rechtsgekrümmt)} \end{cases}$

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}; \quad f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; \quad f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}\right]$

(4) f) Zwei parallele Tangenten t_1 und t_2 mit der Steigung -3 berühren den Graphen von f in den Punkten B_1 und B_2. Stellen Sie die Gleichungen von t_1 und t_2 auf. [**Hinweis:** Ermitteln Sie zunächst die Koordinaten von B_1 und B_2]

$$f'(x) = -3 \iff \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = -3$$

$$\iff x^2-2x-3 = -3(x^2-2x+1)$$

(1)

$$\iff x^2-2x\cancel{-3} = -3x^2+6x\cancel{-3}$$

$$\iff 4x^2-8x = 0 \quad | :4$$

$$\iff x^2-2x = 0 \iff x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \implies \boxed{B_1(0|0)}$$

(1)

$$x_2 = 2 \implies \boxed{B_2(2|10)}$$

$$t_1(x) = -3x + b_1 \implies 0 = -3\cdot 0 + b_1 \implies b_1 = 0$$

$$\implies \boxed{t_1(x) = -3x} \quad (1)$$

$$t_2(x) = -3x + b_2 \implies 10 = -6 + b_2 \implies b_2 = 16$$

$$\implies \boxed{t_2(x) = -3x+16} \quad (1)$$

10 P. **Aufgabe 2:**
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (\pi - x^2 + 2)\sin x - 2x\cos x \qquad \text{für} \qquad 0 \le x \le \pi$$

(3) a) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$. [Teilergebnis: $f'(x) = (\pi - x^2)\cos(x)$]

$$f'(x) = -\cancel{2x\sin x} + (\pi - x^2 + 2)\cos x$$
$$-2\cos x + \cancel{2x\sin x}$$

(2) $\boxed{f'(x) = (\pi - x^2)\cos x}$

$$f''(x) = -2x\cos x - (\pi - x^2)\sin x$$

(1) $\boxed{f''(x) = (x^2 - \pi)\sin x - 2x\cos x}$

(5) b) Ermitteln Sie Art und Lage aller lokalen Extrema von f.

(1) $f'(x) = 0 \iff x^2 = \pi \quad \vee \quad \cos x = 0$

$\iff \boxed{x_1 = \sqrt{\pi}} \; , \; \boxed{x_2 = \frac{\pi}{2}}$

(2) $f''(\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}\underbrace{\cos\sqrt{\pi}}_{<0} \approx 0{,}71 > 0 \Rightarrow \boxed{T(\sqrt{\pi} \mid 2{,}669)}$

(2) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi\right)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \approx -0{,}67 < 0 \Rightarrow \boxed{H\left(\frac{\pi}{2} \,\Big|\, \pi - \frac{\pi^2}{4} + 2\right) \approx 2{,}674}$

(2) c) Berechnen Sie $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{3x\pi - x^3} \overset{l'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{3\pi - 3x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{(\pi - x^2)}\cos x}{3\cancel{(\pi - x^2)}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{3} = \frac{1}{3}.$$

17P. **Aufgabe 3:**
Berechnen Sie die folgenden Integrale!

(6) a) $\int \frac{5x+8}{6x^2-5x-4}\,dx$ (Partialbruchzerlegung)

$6x^2-5x-4=0 \Rightarrow x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{12}$

$x_1=\frac{16}{12}=\frac{4}{3} \qquad =\frac{5\pm 11}{12}$

$x_2=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 6x^2-5x-4=6\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(3x-4)(2x+1)$

$\frac{5x+8}{(3x-4)(2x+1)}=\frac{A}{3x-4}+\frac{B}{2x+1}=\frac{A(2x+1)+B(3x-4)}{(3x-4)(2x+1)}$

(4)
$x=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{11}{3}A=\frac{44}{3} \Leftrightarrow \boxed{A=4}$

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{11}{2}B=\frac{11}{2} \Leftrightarrow \boxed{B=-1}$

daraus

(2) $\int\frac{5x+8}{6x^2-5x-4}\,dx=\int\left(\frac{4}{3x-4}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$

$=\frac{4}{3}\ln|3x-4|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

zu Aufgabe 3:

(5) b) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx$ (partielle Integration)

$$\int \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \int (2-4x)e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}(2-4x)e^{-2x} - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(-4)\,dx$$

(3)

$$= (2x-1)e^{-2x} - 2\int e^{-2x}\,dx$$

$$= (2x-1)e^{-2x} + e^{-2x} = 2x\cdot e^{-2x}$$

$$= \frac{2x}{e^{2x}}$$

daraus

$$\int_{-1/4}^{\infty} \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_{-1/4}^{u} \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \lim_{u\to\infty}\left[\frac{2x}{e^{2x}}\right]_{-1/4}^{u}$$

(2)

$$= \lim_{u\to\infty}\left(\frac{2u}{e^{2u}} + \frac{1}{2e^{-1/2}}\right)$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{u\to\infty}\left(\underbrace{\frac{2}{2e^{2u}}}_{\to 0} + \frac{1}{2}e^{1/2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$\left[\text{Teilergebnis:} \quad \displaystyle\int \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \frac{2x}{e^{2x}} + C\right]$

zu Aufgabe 3:

(3) c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x+\frac{1}{x}}\,dx$ $\qquad$ [Substitution mit: $\quad t = \ln(x^2+1)$]

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{x^2+1} \iff dx \overset{(1)}{=} \frac{x^2+1}{2x}\,dt$$

daraus

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x+\frac{1}{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{t}}{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2+1}{2x}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{t}}{\cancel{x^2+1}}\cancel{(x^2+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

(2)

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2} = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{[\ln(x^2+1)]^3} + C$$

zu Aufgabe 3:

(3) d) $\int \frac{96x^4 - 144x^3 + 70x^2 - 24x + 1}{16x^2 - 24x + 9}\,dx$ (Polynomdivision)

$$(96x^4 - 144x^3 + 70x^2 - 24x + 1) : (16x^2 - 24x + 9) = 6x^2 + 1 - \frac{8}{(4x-3)^2}$$

(2)

$$\begin{array}{l} -(96x^4 - 144x^3 + 54x^2) \\ \hline \qquad 16x^2 - 24x + 1 \\ \qquad -(16x^2 - 24x + 9) \\ \hline \qquad \text{Rest} \quad -8 \end{array}$$

daraus

(1) $$\int \left(6x^2 + 1 - \frac{8}{(4x-3)^2}\right) dx = 2x^3 + x - 8 \cdot \frac{(4x-3)^{-2+1}}{-2+1} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= 2x^3 + x + \frac{2}{4x-3} + C$$

10 P.

Aufgabe 4:
Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = (x+1)(2x-3)^2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = x+1$$

Ermitteln Sie die Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$. Berechnen Sie sodann den Inhalt der Fläche A, die von $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird.
(Beachten Sie, dass A aus mehreren Teilen bestehen kann!)
[Teilergebnis: Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$ bei $x = -1; 1; 2$]

$f(x) - g(x)$

$$f(x) = g(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (x+1)\left((2x-3)^2 - 1\right) = 0$$

(1) $\boxed{x_1 = -1}$ $\qquad (2x-3)^2 = 1 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$$2x - 3 = \pm 1$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2} = \boxed{2}_{(1)}; \quad x_3 = \frac{-1+3}{2} = \boxed{1}_{(1)}$$

$$f(x) - g(x) = (x+1)(4x^2 - 12x + 9 - 1)$$

(1) $$= (x+1)(4x^2 - 12x + 8)$$

$$= 4x^3 - 12x^2 + 8x + 4x^2 - 12x + 8$$

$$\boxed{f(x) - g(x) = 4x^3 - 8x^2 - 4x + 8}$$

(1) $H(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \boxed{x^4 - \frac{8x^3}{3} - 2x^2 + 8x}$

(1) $H(-1) = -\frac{19}{3}; \quad H(1) = \frac{13}{3}; \quad H(2) = \frac{8}{3}$

Somit

(1) $A_1 = \int_{-1}^{1} (f-g)\,dx = H(1) - H(-1) = \frac{13}{3} + \frac{19}{3} = \frac{32}{3}$

(1) $A_2 = \left|\int_{1}^{2} (f-g)\,dx\right| = |H(2) - H(1)| = \left|\frac{8}{3} - \frac{13}{3}\right| = \frac{5}{3}$

(1) Gesamtfläche $A = A_1 + A_2 = \boxed{\frac{37}{3} = 12{,}\overline{3} \text{ FE}}$

7P. **Aufgabe 5:**

(4) a) Ermitteln Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$\frac{z-2}{z-1} = \frac{z-19}{z^2-1} \quad \Big| \cdot (z^2-1)$$

$(z+1)(z-1)$

$$(z-2)(z+1) = z-19$$

$$z^2 - z - 2 = z - 19$$

(2) $$z^2 - 2z + 17 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-68}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{64}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 8i}{2} = 1 \pm 4i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = 1 + 4i} \; ; \; \boxed{z_2 = 1 - 4i}$$

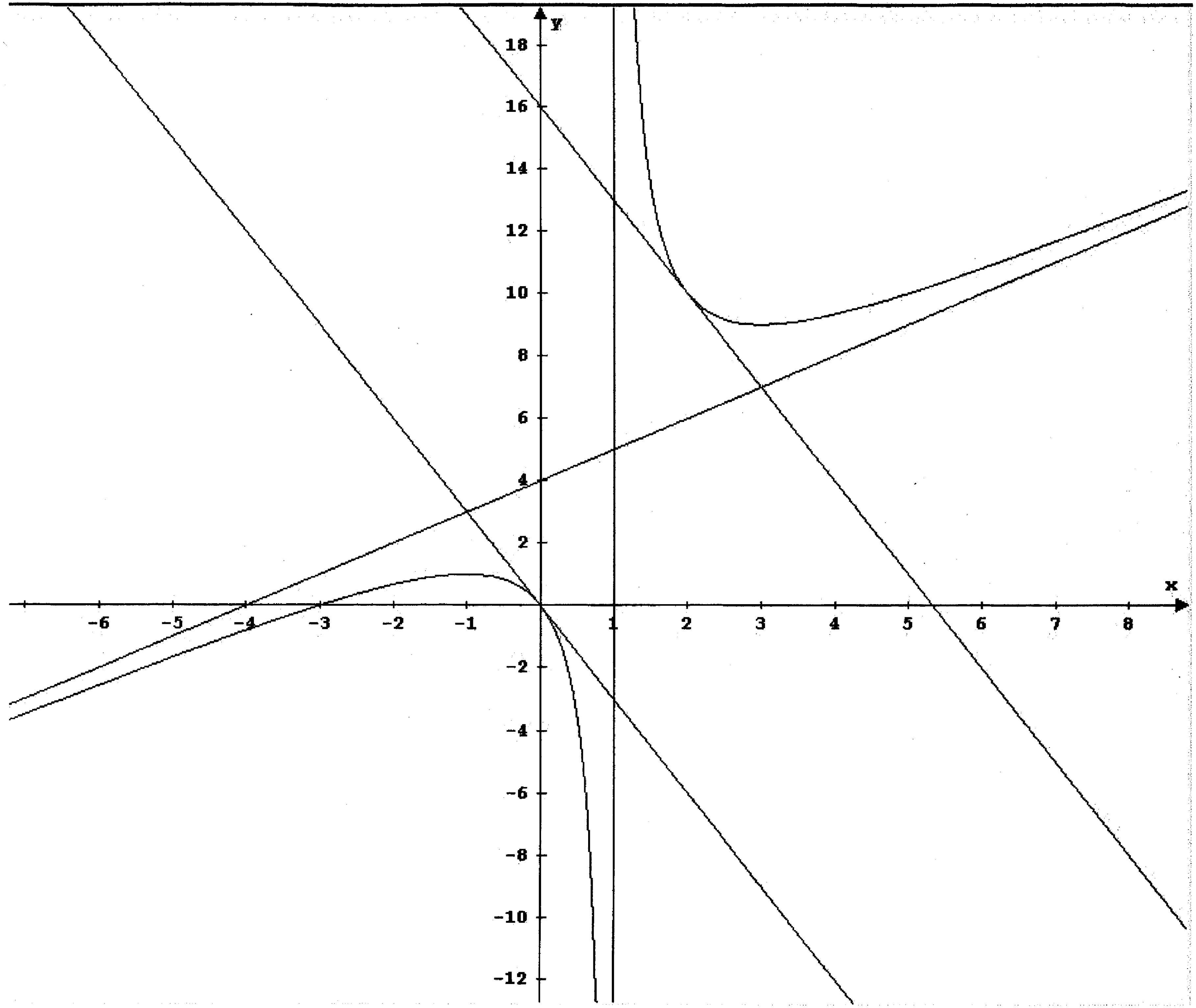
(1) (1)

(3) b) Eine Lösung der obigen Gleichung lautet $z = 1 + 4i$. Setzen Sie diese Lösung in den linken Term der gegebenen Bruchgleichung aus a) ein und stellen Sie diesen Term in kartesischer Form dar.

$$\frac{z-2}{z-1} = \frac{-1+4i}{4i} = \frac{(-1+4i)i}{4i^2} = \frac{-i+4i^2}{-4}$$

$$= \frac{-i-4}{-4} = \boxed{1 + \frac{1}{4}i}$$

Afg 1



Afg 4