Übungsblatt 8:

Aufgabe 1:
Man berechne die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 12 & 1 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 2 & 5 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 12 & 8 & -6 \\ 15 & 3 & 7 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:
Man zeige mittels geschickter elementarer Zeilenumformungen

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{b)} \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2)$$

Aufgabe 3:
Man zeige

$$\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix} = (ad-bc)(mq-pn)$$

Aufgabe 4:
Man berechne die inversen Matrizen A^{-1} und B^{-1} mit Hilfe der Determinante, wobei die Matrizen A und B aus Blatt 7, Aufg. 2 zu nehmen sind.

Aufgabe 5:
Man löse das lineare Gleichungssystem (vgl. Blatt 7, Aufg. 4)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & & & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 6:
Man entscheide mit Hilfe der Determinante, ob die in Blatt 5, Aufg. 3 gegebenen Vektorsysteme (bei c) um den Einheitsvektor e_1 ergänzt) linear unabhängig sind.

Aufgabe 7:

a) Sei A eine 2×2-Matrix über $\mathbf{R}$ und $\lambda \in \mathbf{R}$. Es gelte

$$\det(\lambda A) = 720 \text{ und } \det(A) = 5$$

Welche Werte kann λ annehmen?

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Man berechne $\det(A^{10})$ und $\det((\lambda A)^3)$ mit $\lambda \in \mathbf{R}$.

Aufgabe 8:
Vorgegeben seien die folgenden Vektoren im $\mathbf{R}^2$

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ferner seien $x_1 = \det(e_1, v)$ und $x_2 = \det(e_2, v)$. Man zeige daß die Vektoren v und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zueinander orthogonal sind.