Übungsblatt 4:

Aufgabe 1:
Für die nachfolgenden Funktionen (außer k und l)

a) $f(x,y) = 2x^3 - \dfrac{y^3}{4} + 6xy$

b) $g(x,y) = x^3 + 8y^3 + 12xy$

c) $h(x,y) = x\ln(x+y) - y$ für alle x und y mit $x+y>0$

d) $k(x,y) = \sin(x^2+y^2) + \cos(x+y)$

e) $l(x,y) = \sin(x^2+y^2) - \cos(x+y)$

f) $p(x,y) = (2x+y^2)e^x$

berechne man alle lokalen Extrema und Sattelpunkte. Die Funktionen in d) und e) untersuche man hingegen nur im Punkt $(0;0)$!
Für die Funktion in a) bestimme man zusätzlich die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P = (1;2)$ und gebe das totale Differential von $f(x,y)$ an.

Aufgabe 2:
Von einem geraden Kegelstumpf wurden in mm gemessen die beiden Radien $R = (400 \pm 5)$ und $r = (300 \pm 6)$ sowie die Höhe $h = (500 \pm 8)$.
Man berechne eine Abschätzung für den relativen Fehler des Volumens.
Dabei ist $V(R,r,h) = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+rR)$ Volumenformel für den Kegelstumpf.
(Hinweis: Man bestimme das totale Differential von $V(R,r,h)$ und setze sodann $dR = 5$, $dr = 6$ und $dh = 8$).

Aufgabe 3:
Welches Volumen kann ein Quader maximal haben, wenn seine Raumdiagonale die Länge 1 aufweist? (Raumdiagonale $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, maximiere sodann V^2, wenn V das Volumen des Quaders ist).

Aufgabe 4:
Eine ebene Fläche A sei berandet durch die beiden Kurven

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= x^3 + 2 \\ \beta(x) &= 4 - x^2 \end{aligned}$$

für $0 \leq x \leq 1$, sowie der y-Achse.

a) Man skizziere die Fläche A in der xy-Ebene.

b) Für die Funktion

$$f(x, y) = x^2 y \text{ mit } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \text{ und } 0 \leq x \leq 1$$

berechne man

$$V = \int_0^1 \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx$$

c) Man berechne die Fläche A und die Koordinaten x_S und y_S des Flächenschwerpunktes von A.