Übungsaufgaben zur Prüfungsvorbereitung:

Aufgabe 1:
Ermitteln Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 11 \end{array}$$

Aufgabe 2:
Gegeben sind die linearen Gleichungssysteme

$$1)\; \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & t \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad 2)\; \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & t \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array}$$

Jeweils unter welcher Bedingung an den reellen Parameter t sind die obigen Gleichungssysteme lösbar? Ermitteln Sie alle Lösungen der Gleichungssysteme bei 1) für $t = -1$ und bei 2) für $t = 1$.

Aufgabe 3:
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & b \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & c \end{array}$$

Unter welcher Bedingung an die reellen Parameter a, b und c ist das obige Gleichungssystem lösbar? Man löse es für den konkreten Fall $a = 2$, $b = 3$ und $c = -1$.

Aufgabe 4:
Man bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen

1) $y' = \frac{y}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$ mit $y(1) = 1$

2) $y' = \frac{y}{x^2} + e^{\frac{x^2-1}{x}}$

3) $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-x}$

4) $y' = 3 + e^{y-3x-1}$ mit $y(0) = 1$

5) $y' = 5y - 10x + 7$

6) $y'' - 2y' - 3y = 5e^{-2x}$

7) $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 x\sin x + \frac{y}{x}$ mit $y(\pi) = 1$

8) $xy' = y + x$ mit $y\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e}$

9) $y'' - 4y' + 3y = x$

10) $y'' - y = \cos x$

11) $z' + \frac{z}{x} = 1$

12) $y' - \frac{y}{x} + y^2 = 0$ mit $y(1) = 1$

13) $y'' + 5y' + 4y = e^x$

14) $y'' - 4y = \sin x$

15) $y'' + 5y' + 4y = 10e^x$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = 3$

Hinweise:

1), 4), 7) und 12) löse man durch geeignete Substitution.

2), 8) und 11) löse man durch Variation der Konstanten.

5) löse man durch Aufsuchen einer partikulären Lösung.

12) führe man auf 11) zurück (Substitution) und benutze deren Lösung.

Aufgabe 6:
Ermitteln Sie für die folgenden Funktionen Art und Lage aller lokalen Extrema und Sattelpunkte! Stellen Sie bei 2) zusätzlich die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $P(2|0)$ auf und zeigen Sie bei 2), dass f keine globalen Extrema hat!

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3y$

2) $f(x, y) = (x + y)^3 - 12xy$

3) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 + 12xy$

4) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 27x + 1$

Aufgabe 7:
Eine ebene Fläche A sei durch die beiden Kurven

$$\alpha(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad \beta(x) = 2 - x^2$$

mit $0 \leq x \leq 1$ sowie der y-Achse berandet.

1) Berechnen Sie das Doppelintegral $V = \int\limits_0^1 \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} x^2 y \, dy \, dx$

2) Berechnen Sie die Koordinaten x_S und y_S des Flächenschwerpunktes von A mit Hilfe der Formeln

$$x_S = \frac{1}{A} \int\limits_0^1 \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} x \, dy \, dx \qquad \text{und} \qquad y_S = \frac{1}{A} \int\limits_0^1 \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} y \, dy \, dx$$

Aufgabe 8:
Eine ebene Fläche A sei durch die beiden Kurven

$$\alpha(x) = x^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad \beta(x) = x + 3$$

mit $0 \leq x \leq 2$ sowie der y-Achse berandet.

a) Skizzieren Sie die Fläche A in der xy-Ebene und berechnen Sie diese!

b) Berechnen Sie das Doppelintegral $\int\limits_0^2 \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} xy \, dy \, dx$

Aufgabe 9:
Gegeben ist der Einheitskreis E um den Mittelpunkt $(0; 0)$ in der xy-Ebene und $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$.
Berechnen Sie das Volumen V des zylindrischen Körpers mit Boden E und dem Graphen von $f(x, y)$ als Deckel mit Hilfe von Polarkoordinaten.
Hinweis: Benutzen Sie die Formel

$$V = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r \cdot f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) \, dr d\varphi$$

und verwenden Sie $\int u e^{u^2} \, du = \frac{e^{u^2}}{2} + C$.