Lösungen zum Übungsblatt 8:

Aufgabe 1:
Entwicklung nach der 1. Spalte der Matrix A ergibt

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 3 \\ \mathbf{2} & 5 & 1 \\ \mathbf{2} & 7 & 9 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(45-7) - 2(9-21) + 2(1-15) = 34\end{aligned}$$

oder alternativ nach der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} &= 1\cdot 5\cdot 9 + 1\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 7 - 3\cdot 5\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 7 - 1\cdot 2\cdot 9 \\ &= 45 + 2 + 42 - 30 - 7 - 18 \ = \ 34\end{aligned}$$

Für die Matrix B ergibt sich durch Entwicklung nach der 2. Zeile

$$\begin{aligned}\det(B) &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ \mathbf{2} & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Entwicklung}}{\underset{\text{jew.1.Spalte}}{=}} \left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\right) \\ &\quad -\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) \\ &= 2 - 2(-4) - (0 - 2\cdot 1) = 2 + 8 + 2 = 12\end{aligned}$$

alternativ dazu kann man auch mit elementaren Zeilenumformungen arbeiten und erhält

$$\det(B) \overset{III-2I}{\underset{I\text{fest}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entwicklung}}{\underset{\text{1.Zeile}}{=}} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4 + 6 - (1 - 3) = 12$$

Zur Matrix C:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(a^2 + b^2) = a^2 + b^2$$

Zur Matrix D:

$$\det(D) \overset{III-3II}{\underset{II\text{fest}}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 12 & 8 & -6 \\ \\ 0 & 0 & -29 & -25 & 36 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -29 & -25 & 36 \\ -8 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -18(29 \cdot 2 - 25 \cdot 9 \cdot 6 - 36 \cdot 8 \cdot 5 - 36 \cdot 2 \cdot 6 + 29 \cdot 9 \cdot 5 + 25 \cdot 8 \cdot 1)$$

$$= -18(-1659) = 29862$$

Aufgabe 2:

zu a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{III-aII}{\underset{II\text{fest}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix}$$

$$\overset{II-aI}{\underset{I\text{fest}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

$$\overset{III-bII}{\underset{II\text{fest}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c(c-a)-b(c-a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

zu b)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{I\leftrightarrow III}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{-III}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ -x & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{II-I}{\underset{xI+III}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & 1-x \\ 0 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1-x \\ x-1 & x^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x^2-1)-(1-x)(x-1)$$

$$= (x-1)(x-1)(x+1)+(x-1)^2$$

$$= (x-1)^2(x+1)+(x-1)^2$$

$$= (x-1)^2(x+1+1)$$

$$= (x-1)^2(x+2)$$

Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} am & an \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bp & bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} am & an \\ cm & cn \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} am & an \\ dp & dq \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bp & bq \\ cm & cn \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bp & bq \\ dp & dq \end{vmatrix} \\
&= ac \begin{vmatrix} m & n \\ m & n \end{vmatrix} + ad \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} + bd \begin{vmatrix} p & q \\ p & q \end{vmatrix} \\
&= ad(mq-pn) + bc(pn-mq) \\
&= ad(mq-pn) - bc(mq-pn) \\
&= (ad-bc)(mq-pn)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Es sei $\widetilde{A} = (\widetilde{a_{ij}})$ die zu A komplementäre Matrix. Dann ist

$$\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji}),$$

wobei A_{ji} die Matrix ist, die aus A durch Streichung der j-ten Zeile und i-ten Spalte hervorgeht, und es gilt

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det(A)E_n \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \\
&= 3\cdot 1\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot 3 - 5\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 4\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 6 \\
&= 18 + 8 + 30 - 5 - 36 - 24 = -9
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der komplementären Matrix $\widetilde{A}$ lauten

$$\begin{array}{lllllll}
\widetilde{a_{11}} & = & (-1)^{1+1}\det(A_{11}) & = & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & = & -6 \\[2ex]
\widetilde{a_{12}} & = & (-1)^{1+2}\det(A_{21}) & = & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & = & 3 \\[2ex]
\widetilde{a_{13}} & = & (-1)^{1+3}\det(A_{31}) & = & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & = & 3 \\[2ex]
\widetilde{a_{21}} & = & (-1)^{2+1}\det(A_{12}) & = & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & = & -8 \\[2ex]
\widetilde{a_{22}} & = & (-1)^{2+2}\det(A_{22}) & = & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & = & 13 \\[2ex]
\widetilde{a_{23}} & = & (-1)^{2+3}\det(A_{32}) & = & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & = & -2 \\[2ex]
\widetilde{a_{31}} & = & (-1)^{3+1}\det(A_{13}) & = & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & = & 5 \\[2ex]
\widetilde{a_{32}} & = & (-1)^{3+2}\det(A_{23}) & = & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & = & -7 \\[2ex]
\widetilde{a_{33}} & = & (-1)^{3+3}\det(A_{33}) & = & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & = & -1
\end{array}$$

Daraus folgt

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -8 & 13 & -2 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 8 & -13 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 4 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 20 + 6 - 16 - 1 = 9
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der komplementären Matrix $\widetilde{B}$ lauten

$$\begin{aligned}
\widetilde{b_{11}} &= (-1)^{1+1}\det(B_{11}) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
\widetilde{b_{12}} &= (-1)^{1+2}\det(B_{21}) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\
\widetilde{b_{13}} &= (-1)^{1+3}\det(B_{31}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \\
\widetilde{b_{21}} &= (-1)^{2+1}\det(B_{12}) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \\
\widetilde{b_{22}} &= (-1)^{2+2}\det(B_{22}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \\
\widetilde{b_{23}} &= (-1)^{2+3}\det(B_{32}) = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 \\
\widetilde{b_{31}} &= (-1)^{3+1}\det(B_{13}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13 \\
\widetilde{b_{32}} &= (-1)^{3+2}\det(B_{23}) = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \\
\widetilde{b_{33}} &= (-1)^{3+3}\det(B_{33}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -8 \\ -13 & -5 & 19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:
Es gilt

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \text{ (siehe Aufgabe 4)}$$

Jetzt folgt

$$x_1 = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(35+10-28-8) = \frac{1}{9}\cdot 9 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(32+42-40-7) = \frac{1}{9}\cdot 27 = 3$$

$$x_3 = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(100+24+14-105-64-5) = \frac{1}{9}\cdot(-36) = -4$$

Aufgabe 6:

a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 10+24-9-20 = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{ linear unabhängig}$$

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Dann folgt durch Entwicklung nach der 4. Zeile

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{4+2}2\begin{vmatrix}1&3&4\\4&1&2\\3&0&2\end{vmatrix}+(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&2&4\\4&3&2\\3&5&2\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1&2&3\\4&3&1\\3&5&0\end{vmatrix}\\ &= 2(-16)-36+34=-34\neq 0\end{aligned}$$

Daraus folgt die lineare Unabhängigkeit.

c)

$$\begin{vmatrix}2&2&0&1\\1&3&4&0\\3&5&4&1\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{vmatrix} \underset{\text{4.Zeile}}{\overset{\text{Entwicklung}}{=}} (-1)^{4+1}\begin{vmatrix}2&0&1\\3&4&0\\5&4&1\end{vmatrix}=0$$

Daraus folgt die lineare Abhängigkeit.

Aufgabe 7:

a)

$$720=\det(\lambda A)=\lambda^2\det(A)=\lambda^2 5$$

daraus folgt

$$\lambda^2=\frac{720}{5}=144\Longrightarrow\lambda=12 \text{ oder } \lambda=-12$$

b)

$$\det(A^{10})=\det(A)^{10}=(24-22)^{10}=2^{10}=1024$$
$$\det\big((\lambda A)^3\big)=\det(\lambda^3A^3)=\lambda^6\det(A)^3=8\lambda^6$$

Aufgabe 8:

$$\begin{aligned} vx = a_1x_1 + a_2x_2 &= a_1\det(e_1, v) + a_2\det(e_2, v) \\ &= \det(a_1e_1, v) + \det(a_2e_2, v) \\ &= \det(a_1e_1 + a_2e_2, v) \\ &= \det(v, v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit sind die Vektoren v und x zueinander orthogonal. $\square$