Lösungen zum Übungsblatt 7:

Aufgabe 1:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad {\scriptstyle aI-II} \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a^2-1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad {\scriptstyle (a^2-1)III-aII} \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ -a^2 & a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad {\scriptstyle (a^2-1)I-aII} \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 \\ -a^2 & a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad {\scriptstyle \frac{1}{a^2-1}(I,II,III),|a|\neq 1} \qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 \\ -a^2 & a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

Es gilt also für $|a| \neq 1$ d. h. $a \neq 1$ und $a \neq -1$

$$\text{rang}(A) = 3 \text{ und } A^{-1} = \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 \\ -a^2 & a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

Ist hingegen $|a| = 1$ d. h. $a = 1$ oder $a = -1$, so gilt (siehe links, 2. Matrix von oben)

$$\text{rang}(A) = 2 \Longrightarrow A \text{ nicht invertierbar!}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \qquad \begin{matrix} I-II \\ aI-III \end{matrix} \qquad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \qquad II+III \qquad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ a+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \qquad (a-1)I+II \qquad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & (a-1)(a+1) \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ a+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \qquad (a+2)I-(a+1)III \qquad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} (a-1)(a+2) & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & a+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \qquad (a+2)II-III \qquad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} (a-1)(a+2) & 0 & 0 \\ 0 & (1-a)(a+2) & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & a+1 \\ 1 & -(a+1) & 1 \\ a+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \qquad \begin{matrix} \frac{1}{(a-1)(a+2)}(I,III) \\ \frac{1}{(1-a)(a+2)}II \\ a\neq 1, a\neq -2 \end{matrix} \qquad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ a+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Man betrachte nun die linke Matrizenreihe, dann ergibt sich aus der 3. Matrix von oben

$$\operatorname{rang}(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad a = 1 \\ 2 & \text{falls} \quad a = -2 \\ 3 & \text{falls} \quad a \neq 1 \text{ und } a \neq -2 \end{cases}$$

Im Fall $\operatorname{rang}(B) = 3$ hat man

$$B^{-1} = \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ a+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Es wird nachfolgend gezeigt:

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 8 & -13 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -8 \\ -13 & -5 & 19 \end{pmatrix}$$

Ferner

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -1 \\ 34 & -41 & -5 \\ -71 & 79 & 16 \end{pmatrix} \text{ und } (BA)^{-1} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -30 & -3 & -21 \\ -83 & -70 & 158 \\ 17 & 28 & -47 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \begin{matrix} 2I-3II \\ I-3III \end{matrix} \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & -13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad 7II+III \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 15 & -21 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad I-2II \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 15 & -21 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \begin{matrix} \frac{1}{3}I \\ -\frac{1}{27}III \end{matrix} \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -\frac{5}{9} & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \begin{matrix} I-3III \\ II+2III \end{matrix} \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{6}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{8}{9} & -\frac{13}{9} & \frac{2}{9} \\ \\ -\frac{5}{9} & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad \begin{matrix} 4II-I \\ 4III-3I \end{matrix} \quad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 8 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad 19III-5II \quad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 8 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -52 & -20 & 76 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad 9II-2III \quad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 171 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 95 & 76 & -152 \\ -52 & -20 & 76 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad 171I-II \quad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 684 & 0 & 0 \\ 0 & 171 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 76 & -76 & 152 \\ 95 & 76 & -152 \\ -52 & -20 & 76 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad \begin{matrix} \frac{1}{684}I \\ \frac{1}{171}II \\ \frac{1}{36}III \end{matrix} \quad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{13}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{9} \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Somit gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 8 & -13 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -8 \\ -13 & -5 & 19 \end{pmatrix}$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} \;=\; B^{-1}A^{-1} &= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -8 \\ -13 & -5 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 8 & -13 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -12 & 24 & -3 \\ 102 & -123 & -15 \\ -213 & 237 & 48 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -4 & 8 & -1 \\ 34 & -41 & -5 \\ -71 & 79 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (BA)^{-1} \;=\; A^{-1}B^{-1} &= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 8 & -13 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -8 \\ -13 & -5 & 19 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -30 & -3 & -21 \\ -83 & -70 & 158 \\ 17 & 28 & -47 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3:
Es gilt

$$\begin{aligned} AX + 2(B - X) = E_n - X \quad &\Longleftrightarrow \quad AX + 2B - 2X = E_n - X \\ &\Longleftrightarrow \quad AX - X + 2B = E_n \\ &\Longleftrightarrow \quad (A - E_n)X = E_n - 2B \\ &\Longleftrightarrow \quad X = (A - E_n)^{-1}(E_n - 2B) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$A - E_n = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad \substack{I-II \\ I-2III} \quad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad \scriptstyle 2II+III \quad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad \scriptstyle I-II \quad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad \substack{3I+4III \\ 3II+III} \quad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 12 & -5 & -8 \\ 6 & -5 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \quad \substack{\frac{1}{6}(I,II) \\ -\frac{1}{3}III} \quad \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & -5 & -8 \\ 6 & -5 & -2 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = (A - E_n)^{-1}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
X &= (A-E_n)^{-1}(E_n-2B) \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & -5 & -8 \\ 6 & -5 & -2 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -2 & 0 \\ -2 & -9 & -4 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -26 & 53 & 28 \\ -20 & 41 & 22 \\ 10 & -40 & -20 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:
Aus dem ersten Gleichungssystem folgt

$$x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 8 & -13 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aus dem zweiten Gleichungssystem folgt

$$x = B^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -8 \\ -13 & -5 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ 27 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:
Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccc}
I: & AX & + & BY & = & A^t \\
II: & AX & - & BY & = & B^t
\end{array}$$

folgt

$$\begin{array}{lcccccc}
I+II: & 2AX & = & A^t+B^t & \Longrightarrow & X & = & \frac{1}{2}A^{-1}(A^t+B^t) \\
I-I: & 2BY & = & A^t-B^t & \Longrightarrow & Y & = & \frac{1}{2}B^{-1}(A^t-B^t)
\end{array}$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 8 & -13 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 8 & -13 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & -18 & -12 \\ 27 & -42 & -19 \\ -9 & 33 & 22 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -8 \\ -13 & -5 & 19 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -8 \\ -13 & -5 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 \\ -41 & -27 & -46 \\ 103 & 45 & 116 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\square$