Lösungen zum Übungsblatt 5:

Aufgabe 1:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 22 & 9 & 13 \\ 38 & 34 & 23 & 25 \\ 21 & 25 & 19 & 18 \end{pmatrix}$$

$$ABC = \begin{pmatrix} 24 & 22 & 9 & 13 \\ 38 & 34 & 23 & 25 \\ 21 & 25 & 19 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \\ 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 266 & 204 \\ 472 & 366 \\ 311 & 242 \end{pmatrix}$$

$$2B + B^t = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 8 & 10 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 1 & 13 \\ 3 & 2 & 12 & 5 \\ 8 & 14 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(2B + B^t)C = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 1 & 13 \\ 3 & 2 & 12 & 5 \\ 8 & 14 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \\ 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 153 & 113 \\ 66 & 69 \\ 97 & 75 \\ 108 & 88 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 14 \\ 20 & 38 & 22 \\ 14 & 22 & 26 \end{pmatrix}$$

$$(AA^t)^2 = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 14 \\ 20 & 38 & 22 \\ 14 & 22 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 20 & 14 \\ 20 & 38 & 22 \\ 14 & 22 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 792 & 1348 & 1000 \\ 1348 & 2328 & 1688 \\ 1000 & 1688 & 1356 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[2I-III]{4I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 10 & 13 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II-3III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \text{ d. h. } \operatorname{rang}(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[4I-5IV]{2I-5II} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & -20 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -17 & 7 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -11 & 6 & -20 \\ 0 & -17 & 7 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[17II+IV]{11II+III} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 50 & 2 \\ 0 & 0 & 75 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}III} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 75 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-3III} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

und also $\operatorname{rang}(B) = 4$. Die Zeilenvektoren der beiden Matrizen sind linear unabhängig!

Aufgabe 3:

a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3I-5III]{2I-5II} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -20 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4II-III} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

d. h. der Rang der Matrix ist 3 und daher die Vektoren linear unabhängig im $\mathbf{R}^3$.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{3I-III}{\xrightarrow{4I-II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 11 & 14 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 5 & 11 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2II-IV}{\xrightarrow{5II-III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 34 & 36 \\ 0 & 0 & 17 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{2IV-III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 34 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d. h. die Vektoren sind linear unabhängig im $\mathbf{R}^4$.

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underset{3I-III}{\xrightarrow{2I-II}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II-III} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rang}(...) = 2 < 3$$

d. h. die Vektoren sind linear abhängig im $\mathbf{R}^4$.

Aufgabe 4:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & x \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & x \end{pmatrix} \underset{3I-III}{\xrightarrow{2I-II}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 6-x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{7II-2III} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 28-2(6-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 16+2x \end{pmatrix}$$

die Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn $16 + 2x = 0$, d. h. wenn $x = -8$ ist.

Aufgabe 5:
Das lineare Gleichungssystem läßt sich auch schreiben als $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \ \text{und } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Man betrachtet dann die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 4 & 5 & 6 & b_2 \\ 7 & 8 & 9 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[7I-III]{4I-II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 3 & 6 & 4b_1 - b_2 \\ 0 & 6 & 12 & 7b_1 - b_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2II-III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 3 & 6 & 4b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} Ax = b \text{ lösbar} \quad &\iff \quad \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b) \\ &\iff \quad b_1 - 2b_2 + b_3 = 0 \end{aligned}$$

Sei also nun $b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$, dann ist der Lösungsraum $\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset$. Setze $x_3 = \lambda \in \mathbf{Q}$, dann folgt

$$3x_2 + 6\lambda = 4b_1 - b_2 \iff x_2 = \frac{4b_1 - b_2}{3} - 2\lambda$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - 2\Big(\frac{4b_1 - b_2}{3} - 2\lambda\Big) - 3\lambda \\ &= b_1 - \frac{8b_1 - 2b_2}{3} + 4\lambda - 3\lambda \\ &= \frac{3b_1 - 8b_1 + 2b_2}{3} + \lambda \\ &= \frac{2b_2 - 5b_1}{3} + \lambda \end{aligned}$$

Damit gilt für den Lösungsraum

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ \Big(\frac{2b_2 - 5b_1}{3} + \lambda, \frac{4b_1 - b_2}{3} - 2\lambda, \lambda\Big) \Big| \lambda \in \mathbf{Q} \right\}$$

Aufgabe 6:
Sei A die Koeffizientenmatrix und b die rechte Seite des Gleichungssystems, dann gilt für die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ a & 0 & 0 & 1 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{aI-IV} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & a & 0 & -1 & ab_1 - b_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{aII-IV} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & a & 1 & a(b_2 - b_1) + b_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{aIII-IV} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & a(b_1 - b_2 + b_3) - b_4 \end{pmatrix}$$

Hieraus ersieht man

$$\operatorname{rang}(A) = \begin{cases} 4 & \text{für } a \neq 1 \\ 3 & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

und

$$\operatorname{rang}(A,b) = \begin{cases} 4 & \text{für } \begin{cases} a \neq 1 \text{ oder} \\ a = 1 \text{ und } b_1 + b_3 \neq b_2 + b_4 \end{cases} \\ 3 & \text{für } a = 1 \text{ und } b_1 + b_3 = b_2 + b_4 \end{cases}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} Ax = b \text{ lösbar} &\iff \operatorname{rang}(A,b) = \operatorname{rang}(A) \\ &\iff \begin{cases} a \neq 1 \text{ oder} \\ a = 1 \text{ und } b_1 + b_3 = b_2 + b_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Oder nochmals in Worten:
Für $a \neq 1$ ist das Gleichungssystem für jede rechte Seite b lösbar. Ist hingegen $a = 1$, so ist das Gleichungssystem nur lösbar, wenn $b_1 + b_3 = b_2 + b_4$ gilt.

Aufgabe 7:
Für die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2I-IV]{3I-2II} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -17 & 7 & -10 & -53 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -17 & 7 & -10 & -53 \\ 0 & -9 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[9II+2IV]{17II+2III} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -37 & -3 & -123 \\ 0 & 0 & -23 & 13 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)III]{37IV-23III} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 37 & 3 & 123 \\ 0 & 0 & 0 & 550 & 2200 \end{pmatrix}$$

Daraus ersieht man

$$550x_4 = 2200 \Longleftrightarrow x_4 = 4$$

eingesetzt in die 3. Gleichung ergibt

$$37x_3 + 3 \cdot 4 = 123 \Longleftrightarrow x_3 = 3$$

eingesetzt in die 2. Gleichung ergibt

$$2x_2 - 3 \cdot 3 + 4 = -1 \Longleftrightarrow x_2 = 2$$

eingesetzt in die 1. Gleichung ergibt

$$2x_1 - 3 \cdot 2 + 3 = -1 \Longleftrightarrow x_1 = 1$$

$\square$