Lösungen zum Übungsblatt 4:

Aufgabe 1:

a) Zur Funktion f:

$$f_x = 6x^2 + 6y \quad \text{und} \quad f_y = -\frac{3}{4}y^2 + 6x$$

$$f_{xx} = 12x \quad \text{und} \quad f_{yy} = -\frac{3}{2}y$$

$$f_{xy} = 6 = f_{yx}$$

Daher lautet das totale Differential

$$dz = f_x dx + f_y dy = \Big(6x^2 + 6y\Big)dx + \Big(-\frac{3}{4}y^2 + 6x\Big)dy$$

und die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P = (1;2)$ lautet

$$\begin{aligned} t(x,y) &= f(1;2) + f_x(1;2)(x-1) + f_y(1;2)(y-2) \\ &= 12 + 18(x-1) + 3(y-2) \\ &= 18x + 3y - 12 \end{aligned}$$

Für die Berechnung der kritischen Stellen von f muss gelten

$$\begin{aligned} \text{I}: \quad 6x^2 + 6y &= 0 \implies y = -x^2 \\ \text{II}: \quad -\frac{3}{4}y^2 + 6x &= 0 \implies y^2 - 8x = 0 \end{aligned}$$

daraus folgt

$$8x = y^2 = (-x^2)^2 = x^4 \iff x(x^3 - 8) = 0$$

Letztere Gleichung hat zwei Lösungen

$$\begin{cases} x_1 = 0 \implies y_1 = 0 \\ x_2 = 2 \implies y_2 = -4 \end{cases}$$

d. h. man hat zwei kritische Stellen für f, nämlich

$$P_1 = (0;0) \text{ und } P_2 = (2;-4)$$

Daraus folgt für die Hesse-Matrix im Punkt $P_1 = (0;0)$

$$H_f(0;0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_f(0;0) = -36 < 0$$

d. h. bei $P_1 = (0;0)$ hat f einen Sattelpunkt, nämlich $f(0;0) = 0$.

Für die Hesse-Matrix im Punkt $P_2 = (2;-4)$ folgt

$$H_f(2;-4) = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_f(2;-4) = 24 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = 108 > 0$$

d. h. bei $P_2 = (2;-4)$ hat f ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum wegen $f_{xx}(2;-4) = 24 > 0$. Das lokale Minimum von f lautet daher

$$f(2;-4) = 2 \cdot 8 + \frac{4^3}{4} - 6 \cdot 2 \cdot 4 = -16$$

b) Zur Funktion g:

$$g_x = 3x^2 + 12y \quad \text{und} \quad g_y = 24y^2 + 12x$$

$$g_{xx} = 6x \quad \text{und} \quad g_{yy} = 48y$$

$$g_{xy} = 12 = g_{yx}$$

Daher lautet das totale Differential

$$dz = g_x dx + g_y dy = (3x^2 + 12y)dx + (24y^2 + 12x)dy$$

Für die Berechnung der kritischen Stellen von g muss gelten

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \quad 3x^2 + 12y &= 0 \Longrightarrow x^2 + 4y = 0 \\ \mathrm{II}: \quad 24y^2 + 12x &= 0 \Longrightarrow x = -2y^2 \end{aligned}$$

daraus folgt

$$0 = (-2y^2)^2 + 4y = 4y^4 + 4y \Longleftrightarrow y(y^3 + 1) = 0$$

Letztere Gleichung hat zwei Lösungen

$$\begin{cases} y_1 = 0 & \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \\ \\ y_2 = -1 & \Longrightarrow \quad x_2 = -2 \end{cases}$$

d. h. man hat zwei kritische Stellen für g, nämlich

$$P_1 = (0;0) \text{ und } P_2 = (-2;-1)$$

Daraus folgt für die Hesse-Matrix im Punkt $P_1 = (0;0)$

$$H_g(0;0) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_g(0;0) = -144 < 0$$

d. h. bei $P_1 = (0;0)$ hat g einen Sattelpunkt, $g(0;0) = 0$.

Für die Hesse-Matrix im Punkt $P_2 = (-2;-1)$ folgt

$$H_g(-2;-1) = \begin{pmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -48 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_g(-2;-1) = 432 > 0$$

d. h. bei $P_2 = (-2;-1)$ hat g ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Maximum wegen $g_{xx}(-2;-1) = -12 < 0$. Das lokale Maximum von g lautet daher

$$g(-2;-1) = -8 - 8 + 12 \cdot 2 = 8$$

c) Zur Funktion h:

$$h_x = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} \qquad \text{und} \qquad h_y = \frac{x}{x+y} - 1$$

$$h_{xx} = \frac{1}{x+y} + \frac{x+y-x}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2} \qquad \text{und} \qquad h_{yy} = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

$$h_{xy} = \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} = \frac{x+y-x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2} = h_{yx}$$

Daher lautet das totale Differential

$$dz = h_x dx + h_y dy = \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)dx + \left(\frac{x}{x+y} - 1\right)dy$$

Für die Berechnung der kritischen Stellen von h muss gelten

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \quad & \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} && = 0 \\ \mathrm{II}: \quad & \frac{x}{x+y} - 1 && = 0 \qquad \Longrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

daher folgt aus I:

$$1 + \ln x = 0 \Longleftrightarrow \ln x = -1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

d. h. man hat eine einzige kritische Stelle für h bei $P = \left(\frac{1}{e}; 0\right)$

Daraus folgt für die Hesse-Matrix im Punkt $P = \left(\frac{1}{e}; 0\right)$

$$H_h\left(\frac{1}{e}; 0\right) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_h\left(\frac{1}{e}; 0\right) = -e^2 < 0$$

d. h. bei $P = \left(\frac{1}{e}; 0\right)$ hat h einen Sattelpunkt, $h(P) = -\frac{1}{e}$.

d) Zur Funktion k:

$$k_x = 2x\cos(x^2+y^2) - \sin(x+y)$$

$$k_y = 2y\cos(x^2+y^2) - \sin(x+y)$$

$$k_{xx} = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2) - \cos(x+y)$$

$$k_{yy} = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2) - \cos(x+y)$$

$$k_{xy} = -4xy\sin(x^2+y^2) - \cos(x+y)$$

In $(0;0)$ hat k eine kritische Stelle, denn:

$$k_x(0;0) = 0 \text{ und } k_y(0;0) = 0$$

und für die Hesse-Matrix im Punkt $P = (0;0)$ gilt

$$H_k(0;0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_k(0;0) = 1 - 1 = 0$$

d. h. hier ist mit Hilfe der Hesse-Matrix keine Aussage möglich.

e) Zur Funktion l:

$$l_x = 2x\cos(x^2+y^2) + \sin(x+y)$$

$$l_y = 2y\cos(x^2+y^2) + \sin(x+y)$$

$$l_{xx} = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2) + \cos(x+y)$$

$$l_{yy} = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2) + \cos(x+y)$$

$$l_{xy} = -4xy\sin(x^2+y^2) + \cos(x+y)$$

Zu zeigen, dass l bei $(0;0)$ ein lokales Minimum hat:

$$l_x(0;0) = 0 \text{ und } l_y(0;0) = 0$$

und für die Hesse-Matrix im Punkt $P = (0;0)$ gilt

$$H_l(0;0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_l(0;0) = 9 - 1 = 8 > 0$$

Wegen $l_{xx}(0;0) = 3 > 0$ hat l bei $P = (0;0)$ ein lokales Minimum, nämlich $l(P) = -1$.

f) Zur Funktion p:

$$p_x = 2e^x + (2x + y^2)e^x = (2 + 2x + y^2)e^x$$

$$p_y = 2ye^x \text{ und } p_{yy} = 2e^x$$

$$p_{xx} = 2e^x + (2 + 2x + y^2)e^x = (4 + 2x + y^2)e^x$$

$$p_{xy} = 2ye^x$$

Für die Berechnung der kritischen Stellen von p muss gelten

$$\begin{array}{rlcll} \mathrm{I}: & (2 + 2x + y^2)e^x & = & 0 & \Longrightarrow 2 + 2x + y^2 = 0 \\ \mathrm{II}: & 2ye^x & = & 0 & \Longrightarrow y = 0 \end{array}$$

daher folgt aus I:

$$2 + 2x = 0 \Longleftrightarrow x = -1$$

d. h. man hat eine einzige kritische Stelle für p bei $P = (-1;0)$

Daraus folgt für die Hesse-Matrix im Punkt $P = (-1;0)$

$$H_p(-1;0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_p(-1;0) = \frac{4}{e^2} > 0$$

d. h. bei $P = (-1;0)$ hat p ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Miniimum wegen $p_{xx}(-1;0) = \frac{2}{e} > 0$. Das lokale Minimum von p lautet

$$p(-1;0) = -\frac{2}{e}$$

Aufgabe 2:

$$V_R = \frac{\pi h}{3}(2R + r) \qquad V_r = \frac{\pi h}{3}(2r + R)$$

$$V_h = \frac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + rR) = \frac{V}{h}$$

Damit lautet das totale Differential für V(R,r,h):

$$\begin{aligned} dV &= V_R dR + V_r dr + V_h dh \\ &= \frac{500\pi}{3}(800 + 300)dR + \frac{500\pi}{3}(600 + 400)dr + \frac{\pi}{3}(400^2 + 300^2 + 300 \cdot 400)dh \\ &= \frac{\pi}{3}(550.000 \cdot 5 + 500.000 \cdot 6 + 370.000 \cdot 8) = 9.121.091 \end{aligned}$$

Ferner

$$V = \frac{500\pi}{3}(400^2 + 300^2 + 300 \cdot 400) = 193.731.547$$

und damit

$$|\Delta V/V| \leq 0,0471 = 4,71\%$$

Aufgabe 3:
Seien x, y und z die Seitenlängen des Quaders, so ist sein Volumen

$$V = xyz$$

Dies ist die zu maximierende Zielfunktion. Als Nebenbedingung gilt für die Raumdiagonale

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Aus der Nebenbedingung folgt

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

eingesetzt in die Zielfunktion ergibt

$$V(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{x^2y^2 - x^4y^2 - x^2y^4}$$

Das Maximieren der Zielfunktion ist gleichbedeutend mit der Maximierung des quadrierten Volumens

$$f(x,y) = V^2(x,y) = x^2y^2 - x^4y^2 - x^2y^4 \text{ mit } x,y,z > 0$$

Für die partiellen Ableitungen von f gilt:

$$f_x = 2xy^2 - 4x^3y^2 - 2xy^4 \qquad \text{und} \quad f_y = 2x^2y - 2x^4y - 4x^2y^3$$

$$f_{xx} = 2y^2 - 12x^2y^2 - 2y^4 \qquad \text{und} \quad f_{yy} = 2x^2 - 2x^4 - 12x^2y^2$$

$$f_{xy} = 4xy - 8x^3y - 8xy^3 = f_{yx}$$

Für die Berechnung der kritischen Stellen von f muss gelten

$$\begin{aligned} \text{I}: &\quad 2xy^2 - 4x^3y^2 - 2xy^4 = 0 \iff xy^2(2 - 4x^2 - 2y^2) = 0 \\ \text{II}: &\quad 2x^2y - 2x^4y - 4x^2y^3 = 0 \iff x^2y(2 - 2x^2 - 4y^2) = 0 \end{aligned}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{I}: &\quad xy^2(2 - 4x^2 - 2y^2) = 0 \iff 2x^2 + y^2 = 1 \\ \text{II}: &\quad x^2y(2 - 2x^2 - 4y^2) = 0 \iff x^2 + 2y^2 = 1 \end{aligned}$$

mit $2 \cdot II - I$ folgt

$$3y^2 = 1 \iff y = \sqrt{\frac{1}{3}} \implies x = \sqrt{1 - 2\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Daraus folgt für die Hesse-Matrix im Punkt $P = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} -\dfrac{8}{9} & -\dfrac{4}{9} \\ \\ -\dfrac{4}{9} & -\dfrac{8}{9} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_f(P) = \left(\frac{8}{9}\right)^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{48}{81} > 0$$

d. h. f hat bei P ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Maximum wegen $f_{xx}(P) = -\dfrac{8}{9} < 0$. Nun gilt

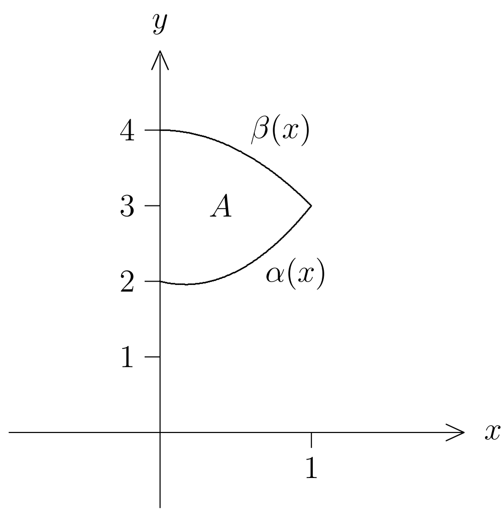
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

und damit ist das maximale Volumen des Quaders

$$V = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Aufgabe 4:

a) Skizze der Fläche A in der xy-Ebene:



b) Es ist

$$V = \int_0^1 \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy dx$$

das Volumen des Zylinders mit Boden A und dem Graphen

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | z = f(x,y)\}$$

von f als Deckel. Für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ hat der Zylinder die Höhe $f(x,y)$. Nun gilt

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\,dx \;=\; \int_0^1 \int_{x^3+2}^{4-x^2} x^2 y\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 \left(\int_{x^3+2}^{4-x^2} y\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^3+2}^{4-x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \Big((4-x^2)^2 - (x^3+2)^2 \Big) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (16 - 8x^2 + x^4 - x^6 - 4x^3 - 4) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (12x^2 - 8x^4 + x^6 - x^8 - 4x^5) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[4x^3 - \frac{8}{5}x^5 + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} - \frac{2}{3}x^6 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \left(4 - \frac{8}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1260 - 504 + 45 - 35 - 210}{315} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{556}{315} \;=\; \frac{278}{315}
\end{aligned}
$$

c)

$$A = \int_0^1 \int_{x^3+2}^{4-x^2} dy dx = \int_0^1 (4 - x^2 - x^3 - 2) dx$$

$$= \int_0^1 (2 - x^2 - x^3) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{24 - 4 - 3}{12} = \frac{17}{12}$$

Für die Koordinaten x_S und y_S des Schwerpunktes von A gilt:

$$x_S = \frac{1}{A} \int_0^1 \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} x dy dx = \frac{12}{17} \int_0^1 \int_{x^3+2}^{4-x^2} x dy dx$$

$$= \frac{12}{17} \int_0^1 x \left(\int_{x^3+2}^{4-x^2} dy \right) dx$$

$$= \frac{12}{17} \int_0^1 x(4 - x^2 - x^3 - 2) dx$$

$$= \frac{12}{17} \int_0^1 (2x - x^3 - x^4) dx$$

$$= \frac{12}{17} \left[x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{12}{17} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{17} \cdot \frac{20 - 5 - 4}{20}$$

$$= \frac{12}{17} \cdot \frac{11}{20} = \frac{3}{17} \cdot \frac{11}{5} = \frac{33}{85} = 0,39$$

$$
\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{A}\int_0^1 \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} y\,dy\,dx \;=\; \frac{12}{17}\int_0^1 \int_{x^3+2}^{4-x^2} y\,dy\,dx \\
&= \frac{12}{17}\int_0^1 \left(\int_{x^3+2}^{4-x^2} y\,dy \right) dx \\
&= \frac{12}{17}\int_0^1 \left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^3+2}^{4-x^2} \right) dx \\
&= \frac{6}{17}\int_0^1 \left(\left(4-x^2\right)^2 - \left(x^3+2\right)^2 \right) dx \\
&= \frac{6}{17}\int_0^1 \left(16 - 8x^2 + x^4 - x^6 - 4x^3 - 4\right) dx \\
&= \frac{6}{17}\int_0^1 \left(12 - 8x^2 + x^4 - x^6 - 4x^3\right) dx \\
&= \frac{6}{17}\left[12x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - x^4\right]_0^1 \\
&= \frac{6}{17}\left(12 - \frac{8}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - 1\right) \\
&= \frac{6}{17} \cdot \frac{1155 - 280 + 21 - 15}{105} \\
&= \frac{6}{17} \cdot \frac{881}{105} \;=\; \frac{2 \cdot 881}{17 \cdot 35} \;=\; \frac{1762}{595} \;=\; 2,96
\end{aligned}
$$

Damit ist der Schwerpunkt $S = (0,39; 2,96)$.