Lösungen zum Übungsblatt 10:

Aufgabe 1:

a) Variablentrennung ergibt

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x \, dx = \sin x - C$$

und daraus erhält man die allgemeine Lösung

$$y = \frac{1}{C - \sin x} \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

b) Variablentrennung ergibt

$$e^y = \int e^y \, dy = -\int \sin(3x-1) \, dx = \frac{\cos(3x-1)}{3} + C$$

und daraus erhält man die allgemeine Lösung

$$y = \ln\left(\frac{\cos(3x-1)}{3} + C\right) \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

c) Variablentrennung ergibt

$$2\sqrt{y} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

und daraus erhält man

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(C - \frac{1}{x}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{1}{4}\left(C - \frac{1}{x}\right)^2 \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

d) In äquivalenter Form lautet die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1-y}{x} \qquad \text{für} \qquad x \neq 0$$

Variablentrennung ergibt

$$-\ln|1-y| = \int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| - C$$

daraus

$$1 - y = \pm e^{C - \ln|x|} = \pm e^{C} e^{-\ln|x|} = \frac{-K}{x} \qquad \text{mit} \qquad K \in \mathbf{R}$$

und daraus erhält man die allgemeine Lösung

$$y = 1 + \frac{K}{x} \qquad \text{mit} \qquad K \in \mathbf{R}\,.$$

Aufgabe 2:

a) Substituiere $z = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow y = zx$ und man erhält

$$1 - 3z = y' = (zx)' = z'x + z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z' = \frac{1-4z}{x}$$

Variablentrennung ergibt

$$-\frac{\ln|1-4z|}{4} = \int \frac{dz}{1-4z} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| - C$$

daraus

$$\ln|1-4z| = 4(C - \ln|x|) = 4C - 4\ln|x|$$

somit

$$1 - 4z = \pm e^{4C - 4\ln|x|} = \pm e^{4C} e^{-\ln(x^4)} = \frac{-K}{x^4} \qquad \text{mit} \qquad K \in \mathbf{R}$$

und daraus erhält man die allgemeine Lösung

$$\frac{4y}{x} = 4z = 1 + \frac{K}{x^4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{1}{4}\left(x + \frac{K}{x^3}\right) \qquad \text{mit} \qquad K \in \mathbf{R}\,.$$

b) In äquivalenter Form lautet die Differentialgleichung

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

Substituiere $z = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow y = zx$ und man erhält

$$e^{-z} + z = y' = (zx)' = z'x + z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z' = \frac{e^{-z}}{x}$$

Variablentrennung ergibt

$$e^z = \int e^z \, dz = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

daraus erhält man die allgemeine Lösung

$$\frac{y}{x} = z = \ln\big(C + \ln|x|\big) \quad \Longleftrightarrow \quad y = x \ln\big(C + \ln|x|\big) \quad \text{mit} \quad C \in \mathbf{R}\,.$$

c) In äquivalenter Form lautet die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \qquad \text{für} \qquad x \neq 0$$

Substituiere $z = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow y = zx$ und man erhält

$$\frac{1}{z} + z = y' = (zx)' = z'x + z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z' = \frac{1}{xz}$$

Variablentrennung ergibt

$$\frac{z^2}{2} = \int z \, dz = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \frac{C}{2}$$

daraus erhält man

$$\frac{y}{x} = z = \pm\sqrt{2\left(\frac{C}{2} + \ln|x|\right)} = \pm\sqrt{C + \ln(x^2)}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$y = \pm x\sqrt{C + \ln(x^2)} \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

d) Substituiere $z = 3x - y$ und man erhält

$$z' = 3 - y' = 3 - 6z + z^2 + 6 = z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$$

Variablentrennung ergibt

$$-\frac{1}{z-3} = \int \frac{dz}{(z-3)^2} = \int dx = x + C$$

daraus erhält man die allgemeine Lösung

$$3-3x+y = 3-z = \frac{1}{x+C} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{x+C}+3x-3 \quad \text{mit} \quad C \in \mathbf{R}\,.$$

Aufgabe 3:

a) In äquivalenter Form lautet die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x} + \frac{\cos x}{x} \qquad \text{für} \qquad x \neq 0$$

Für den homogenen Fall $y' = -\frac{y}{x}$ erhält man durch Variablentrennung

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C$$

und damit die allgemeine homogene Lösung

$$y_0 = \pm e^{C-\ln|x|} = \pm e^C e^{-\ln|x|} = \frac{\pm e^C}{|x|} = \frac{K}{x} \quad \text{mit} \quad K \in \mathbf{R}\,.$$

Variation der Konstanten K führt zum Lösungsansatz

$$y = \frac{K(x)}{x} \qquad \text{mit einer Funktion } K(x) \text{ in } x$$

für die inhomogene Differentialgleichung, in diese eingesetzt ergibt

$$-\frac{y}{x} + \frac{\cos x}{x} = y' = \frac{K'(x)x - K(x)}{x^2} = \frac{K'(x)}{x} - \frac{y}{x}$$

und daraus

$$\frac{K'(x)}{x} = \frac{\cos x}{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad K'(x) = \cos x$$

somit

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

und man erhält für den inhomogenen Fall die allgemeine Lösung

$$y = \frac{\sin x + C}{x} \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

b) Für den homogenen Fall

$$y' + \frac{y}{1+x} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = -\frac{y}{1+x}$$

erhält man durch Variablentrennung

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x} = -\ln|1+x| + C$$

und damit die allgemeine homogene Lösung

$$y_0 = \pm e^{C - \ln|1+x|} = \pm e^C e^{-\ln|1+x|} = \frac{\pm e^C}{|1+x|} = \frac{K}{1+x} \quad \text{mit} \quad K \in \mathbf{R}\,.$$

Variation der Konstanten K führt zum Lösungsansatz

$$y = \frac{K(x)}{1+x} \qquad \text{mit einer Funktion } K(x) \text{ in } x$$

für die inhomogene Differentialgleichung, in diese eingesetzt ergibt

$$-\frac{y}{1+x} + \frac{2}{1-x^2} = y' = \frac{K'(x)(1+x) - K(x)}{(1+x)^2} = \frac{K'(x)}{1+x} - \frac{y}{1+x}$$

und daraus

$$\frac{K'(x)}{1+x} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad K'(x) = \frac{2}{1-x}$$

somit

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \int \frac{2}{1-x}\,dx = -2\ln|1-x| + C$$

und man erhält für den inhomogenen Fall die allgemeine Lösung

$$y = \frac{C - 2\ln|1-x|}{1+x} \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

c) Für den homogenen Fall

$$y' - y\cos x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = y\cos x$$

erhält man durch Variablentrennung

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

und damit die allgemeine homogene Lösung

$$y_0 = \pm e^{C+\sin x} = \pm e^C e^{\sin x} = K e^{\sin x} \quad \text{mit} \quad K \in \mathbf{R}\,.$$

Variation der Konstanten K führt zum Lösungsansatz

$$y = K(x)e^{\sin x} \qquad \text{mit einer Funktion } K(x) \text{ in } x$$

für die inhomogene Differentialgleichung, in diese eingesetzt ergibt

$$y\cos x + e^{2x+\sin x} = y' = K'(x)e^{\sin x} + K(x)e^{\sin x}\cos x = K'(x)e^{\sin x} + y\cos x$$

und daraus

$$K'(x)e^{\sin x} = e^{2x+\sin x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad K'(x) = e^{2x}$$

somit

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

und man erhält für den inhomogenen Fall die allgemeine Lösung

$$y = \left(\frac{e^{2x}}{2} + C\right)e^{\sin x} \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

d) In äquivalenter Form lautet die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{1-x} + \frac{e^x}{1-x} \qquad \text{für} \qquad x \neq 1$$

Für den homogenen Fall

$$y' = \frac{y}{1-x}$$

erhält man durch Variablentrennung

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + C$$

und damit die allgemeine homogene Lösung

$$y_0 = \pm e^{C-\ln|1-x|} = \pm e^C e^{-\ln|1-x|} = \frac{\pm e^C}{|1-x|} = \frac{K}{1-x} \qquad \text{mit} \qquad K \in \mathbf{R}\,.$$

Variation der Konstanten K führt zum Lösungsansatz

$$y = \frac{K(x)}{1-x} \qquad \text{mit einer Funktion } K(x) \text{ in } x$$

für die inhomogene Differentialgleichung, in diese eingesetzt ergibt

$$\frac{y}{1-x} + \frac{e^x}{1-x} = y' = \frac{K'(x)(1-x) + K(x)}{(1-x)^2} = \frac{K'(x)}{1-x} + \frac{y}{1-x}$$

und daraus

$$\frac{K'(x)}{1-x} = \frac{e^x}{1-x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad K'(x) = e^x$$

somit

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + C$$

und man erhält für den inhomogenen Fall die allgemeine Lösung

$$y = \frac{e^x + C}{1-x} \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Aufgabe 4:

a) Für den homogenen Fall $y' = 3y$ erhält man durch Variablentrennung

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = \int 3\,dx = 3x + C$$

und damit die allgemeine homogene Lösung

$$y_0 = \pm e^{C+3x} = \pm e^C e^{3x} = Ke^{3x} \quad \text{mit} \quad K \in \mathbf{R}\,.$$

Im inhomogenen Fall ist das Störglied $g(x) = -6x + 5$ und man erhält nach Tabelle einen partikulären Lösungsansatz

$$y_p = ax + b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbf{R} \qquad \Longrightarrow \qquad y_p' = a$$

für die inhomogene Differentialgleichung, in diese eingesetzt

$$-6x + 5 = y_p' - 3y_p = a - 3(ax + b) = -3ax + a - 3b$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{array}{llcrcl} I: & -3a & = & -6 & \Longrightarrow & a = 2 \\ II: & a - 3b & = & 5 & \Longrightarrow & b = \frac{1}{3}(a-5) = -1 \end{array}$$

Damit ist $y_p = 2x - 1$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y = y_0 + y_p = Ke^{3x} + 2x - 1 \qquad \text{mit} \qquad K \in \mathbf{R}\,.$$

b) Für den homogenen Fall $y' = 4y$ erhält man durch Variablentrennung

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = \int 4\,dx = 4x + C$$

und damit die allgemeine homogene Lösung

$$y_0 = \pm e^{C+4x} = \pm e^C e^{4x} = Ke^{4x} \quad \text{mit} \quad K \in \mathbf{R}\,.$$

Im inhomogenen Fall ist das Störglied $g(x) = -8x^2 + 5$ und man erhält nach Tabelle einen partikulären Lösungsansatz

$$y_p = ax^2 + bx + c \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbf{R} \qquad \Longrightarrow \qquad y_p' = 2ax + b$$

für die inhomogene Differentialgleichung, in diese eingesetzt

$$-8x^2+5 = y_p' - 4y_p = 2ax+b-4(ax^2+bx+c) = -4ax^2+(2a-4b)x+b-4c$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{array}{rrcrl} I: & -4a & = & -8 & \Longrightarrow \ a = 2 \\ II: & 2a-4b & = & 0 & \Longrightarrow \ b = \dfrac{a}{2} = 1 \\ III: & b-4c & = & 5 & \Longrightarrow \ c = \dfrac{1}{4}(b-5) = -1 \end{array}$$

Damit ist $y_p = 2x^2 + x - 1$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y = y_0 + y_p = Ke^{4x} + 2x^2 + x - 1 \qquad \text{mit} \qquad K \in \mathbf{R}\,.$$

c) Für den homogenen Fall

$$y' - 5y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = 5y$$

erhält man durch Variablentrennung

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = \int 5\,dx = 5x + C$$

und damit die allgemeine homogene Lösung

$$y_0 = \pm e^{C+5x} = \pm e^C e^{5x} = Ke^{5x} \quad \text{mit} \quad K \in \mathbf{R}\,.$$

Im inhomogenen Fall ist das Störglied $g(x) = \sin x + 5\cos x$ und man erhält nach Tabelle einen partikulären Lösungsansatz

$$y_p = a\sin x + b\cos x \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbf{R} \qquad \Longrightarrow \qquad y_p' = a\cos x - b\sin x$$

für die inhomogene Differentialgleichung, in diese eingesetzt

$$\begin{aligned} \sin x + 5\cos x = y_p' - 5y_p &= a\cos x - b\sin x - 5(a\sin x + b\cos x) \\ &= (a-5b)\cos x - (b+5a)\sin x \end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{array}{rrcrl} I: & a-5b & = & 5 & \Longrightarrow \ a = 5(b+1) \\ II: & -b-5a & = & 1 & \\ \hline 5I+II: & -25b-b & = & 26 & \Longleftrightarrow \ b = -1 \end{array}$$

Damit ist $a = 5(b+1) = 0$, d. h. $y_p = -\cos x$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y = y_0 + y_p = Ke^{5x} - \cos x \qquad \text{mit} \qquad K \in \mathbf{R}\,.$$

d) Für den homogenen Fall

$$y' + y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = -y$$

erhält man durch Variablentrennung

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = -\int dx = -x + C$$

und damit die allgemeine homogene Lösung

$$y_0 = \pm e^{C-x} = \pm e^C e^{-x} = Ke^{-x} \quad \text{mit} \quad K \in \mathbf{R}\,.$$

Im inhomogenen Fall ist das Störglied $g(x) = 5\cos(2x)$ und man erhält nach Tabelle einen partikulären Lösungsansatz

$$y_p = a\sin(2x) + b\cos(2x) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbf{R} \quad \Longrightarrow \quad y_p' = 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)$$

für die inhomogene Differentialgleichung, in diese eingesetzt

$$\begin{aligned} 5\cos(2x) = y_p' + y_p &= 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x) + a\sin(2x) + b\cos(2x) \\ &= (a-2b)\sin(2x) + (2a+b)\cos(2x) \end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{array}{lrcll} I: & a - 2b & = & 0 & \\ II: & 2a + b & = & 5 & \Longrightarrow \quad b = 5 - 2a \\ \hline I + 2II: & a + 4a & = & 10 & \Longleftrightarrow \quad a = 2 \end{array}$$

Damit ist $b = 5 - 2a = 1$, d. h. $y_p = 2\sin(2x) + \cos(2x)$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y = y_0 + y_p = Ke^{-x} + 2\sin(2x) + \cos(2x) \qquad \text{mit} \qquad K \in \mathbf{R}\,.$$

Aufgabe 5:

a) Für den homogenen Fall $y'' + 2y' - 15y = 0$ führt der Lösungsansatz $y = e^{\lambda x}$ zur charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0 \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbf{C}$$

und man erhält die reellen Lösungen

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -5$ d. h. ein Fundamentalsystem

$$y_1 = e^{3x} \qquad \text{und} \qquad y_2 = e^{-5x}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x} \qquad \text{mit} \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R}$$

für die homogene Differentialgleichung.

Im inhomogenen Fall ist das Störglied $g(x) = 15x - 32$ und man erhält nach Tabelle einen partikulären Lösungsansatz

$$y_p = ax + b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbf{R} \qquad \Longrightarrow \qquad y_p' = a, \quad y_p'' = 0$$

für die inhomogene Differentialgleichung, in diese eingesetzt

$$15x - 32 = y_p'' + 2y_p' - 15y_p = 2a - 15(ax+b) = -15ax + 2a - 15b$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{array}{rrcrcl} I: & -15a & = & 15 & \Longrightarrow & a = -1 \\ II: & 2a - 15b & = & -32 & \Longrightarrow & b = \dfrac{1}{15}(2a+32) = 2 \end{array}$$

Damit ist $y_p = -x + 2$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y = y_0 + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x} - x + 2 \qquad \text{mit} \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

b) Für den homogenen Fall $y'' - 14y' + 49y = 0$ führt der Lösungsansatz $y = e^{\lambda x}$ zur charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 - 14\lambda + 49 = 0 \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbf{C}$$

und man erhält eine zweifache reelle Lösung

$$\lambda = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2} = 7$$

also nach Tabelle ein Fundamentalsystem

$$y_1 = e^{7x} \qquad \text{und} \qquad y_2 = xe^{7x}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{7x} \qquad \text{mit} \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R}$$

für die homogene Differentialgleichung.

Im inhomogenen Fall ist das Störglied $g(x) = 2e^{6x}$, dabei ist 6 keine Lösung der charakteristischen Gleichung und man erhält nach Tabelle einen partikulären Lösungsansatz

$$y_p = Ae^{6x} \quad \text{mit} \quad A \in \mathbf{R} \qquad \Longrightarrow \qquad y_p' = 6Ae^{6x}, \quad y_p'' = 36Ae^{6x}$$

für die inhomogene Differentialgleichung, in diese eingesetzt

$$2e^{6x} = y_p'' - 14y_p' + 49y_p = 36Ae^{6x} - 14 \cdot 6Ae^{6x} + 49Ae^{6x} = Ae^{6x}$$

daraus folgt $A = 2$. Damit ist $y_p = 2e^{6x}$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y = y_0 + y_p = (C_1 + C_2 x)e^{7x} + 2e^{6x} \qquad \text{mit} \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

c) Für den homogenen Fall $y'' + 2y' - 24y = 0$ führt der Lösungsansatz $y = e^{\lambda x}$ zur charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda - 24 = 0 \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbf{C}$$

und man erhält zwei einfache reelle Lösungen

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

also $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -6$ d. h. ein Fundamentalsystem

$$y_1 = e^{4x} \qquad \text{und} \qquad y_2 = e^{-6x}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$y_0 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-6x} \qquad \text{mit} \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R}$$

für die homogene Differentialgleichung.

Im inhomogenen Fall ist das Störglied $g(x) = 20e^{4x}$, dabei ist 4 eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung und man erhält nach Tabelle einen partikulären Lösungsansatz

$$y_p = Axe^{4x} \quad \text{mit} \qquad A \in \mathbf{R}$$

für die inhomogene Differentialgleichung. Daraus folgt für die Ableitungen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_p' & = & Ae^{4x} + 4Axe^{4x} \\ \\ y_p'' & = & 4Ae^{4x} + 4Ae^{4x} + 16Axe^{4x} = 8Ae^{4x} + 16Axe^{4x} \end{array} \right.$$

eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$\begin{array}{rcl} 20e^{4x} & = & y_p'' + 2y_p' - 24y_p \\ \\ & = & 8Ae^{4x} + 16Axe^{4x} + 2Ae^{4x} + 8Axe^{4x} - 24Axe^{4x} \\ \\ & = & 10Ae^{4x} \qquad | : 10e^{4x} \end{array}$$

daraus folgt $A = 2$. Damit ist $y_p = 2xe^{4x}$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y = y_0 + y_p = (2x + C_1)e^{4x} + C_2 e^{-6x} \qquad \text{mit} \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

d) Für den homogenen Fall $y'' - 6y' + 13y = 0$ führt der Lösungsansatz $y = e^{\lambda x}$ zur charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbf{C}$$

und man erhält zwei komplexe Lösungen

$$\lambda_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

also nach Formelsammlung $\alpha = 3$ und $\omega = 2$ und damit die allgemeine Lösung

$$y_0 = e^{3x}\Big(C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)\Big) \qquad \text{mit} \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R}$$

für die homogene Differentialgleichung.

Im inhomogenen Fall ist das Störglied $g(x) = 30 \sin x$ und man erhält nach Tabelle einen partikulären Lösungsansatz

$$y_p = a \sin x + b \cos x \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbf{R}$$

für die inhomogene Differentialgleichung. Daraus folgt für die Ableitungen

$$y_p' = a \cos x - b \sin x \qquad \text{und} \qquad y_p'' = -a \sin x - b \cos x$$

eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} 30 \sin x &= y_p'' - 6y_p' + 13y_p \\ &= -a \sin x - b \cos x - 6a \cos x + 6b \sin x + 13a \sin x + 13b \cos x \\ &= (12a + 6b) \sin x + (12b - 6a) \cos x \end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{array}{lrcll} I: & 12a + 6b & = & 30 & \Longrightarrow \quad b = 5 - 2a \\ II: & 12b - 6a & = & 0 & \\ \hline I - \frac{1}{2}II: & 12a + 3a & = & 30 & \Longleftrightarrow \quad a = 2 \end{array}$$

Damit ist $b = 5 - 2a = 1$, d. h. $y_p = 2 \sin x + \cos x$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y = y_0 + y_p = e^{3x}\Big(C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)\Big) + 2 \sin x + \cos x \quad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Aufgabe 6:

a) Nach Afg 1a) lautet die allgemeine Lösung

$$y = \frac{1}{C - \sin x} \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Mit der Anfangsbedingung folgt

$$1 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{C - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{C-1}$$

somit $C = 2$ und die spezielle Lösung lautet

$$y = \frac{1}{2 - \sin x} \quad .$$

b) Nach Afg 2c) lautet die allgemeine Lösung

$$y = \pm x\sqrt{C + \ln(x^2)} \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Mit der Anfangsbedingung folgt

$$2 = y(1) = \pm 1 \cdot \sqrt{C + \ln(1)} = \pm\sqrt{C}$$

somit $C = 4$ und die spezielle Lösung lautet

$$y = \pm x\sqrt{4 + \ln(x^2)} \quad .$$

c) Nach Afg 3b) lautet die allgemeine Lösung

$$y = \frac{C - 2\ln|1-x|}{1+x} \qquad \text{mit} \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Mit der Anfangsbedingung folgt

$$1 = y(2) = \frac{C - 2\ln|1-2|}{1+2} = \frac{C - 2\ln(1)}{3} = \frac{C}{3}$$

somit $C = 3$ und die spezielle Lösung lautet

$$y = \frac{3 - 2\ln|1-x|}{1+x} \quad .$$

d) Nach Afg 4a) lautet die allgemeine Lösung

$$y = Ke^{3x} + 2x - 1 \qquad \text{mit} \qquad K \in \mathbf{R}\,.$$

Mit der Anfangsbedingung folgt

$$2 = y(0) = Ke^0 - 1 = K - 1$$

somit $K = 3$ und die spezielle Lösung lautet

$$y = 3e^{3x} + 2x - 1 \quad .$$

Bemerkung:
Die Aufgabe 3 läßt sich auch mit meiner Formelsammlung (Seite 1) lösen:

a) **Zu Aufgabe 3a):**
In diesem Fall ist $m = -1$, $b = 0$ und $g(x) = \frac{\cos x}{x}$ und es folgt nach Formelsammlung:

$$y = \left(\int \frac{\cos x}{x} \frac{1}{\sqrt[-1]{-x}}\, dx - K\right) \sqrt[-1]{-x} = \left(\int \frac{(-x)\cos x}{x}\, dx - K\right)\frac{1}{-x}$$

$$= \left(\int \frac{x\cos x}{x}\, dx + K\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\int \cos x\, dx + K\right) = \frac{\sin x + K}{x}$$

b) **Zu Aufgabe 3c):**
In diesem Fall ist $f(x) = \cos x \Longrightarrow F(x) = \sin x$ und $g(x) = e^{2x+\sin x}$ und es folgt nach Formelsammlung:

$$y = \left(\int e^{2x+\sin x} e^{-\sin x}\, dx + K\right) e^{\sin x}$$

$$= \left(\int e^{2x}\, dx + K\right) e^{\sin x} = \left(\frac{e^{2x}}{2} + K\right) e^{\sin x}$$

□