Aufgabe 2: (Nachholklausur)

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 11 \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass obiges Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt.

b) Ermitteln Sie die Lösung des obigen Gleichungssystems ~~mittels elementarer Zeilenumformungen~~.

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[3I-III]{2I-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{7II-5III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 44 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 3 \Rightarrow$ es gilt genau eine Lösung.

b) $11x_3 = 44 \Rightarrow \boxed{x_3 = 4}$

in II: $-5x_2 + 12 = 7 \Leftrightarrow -5x_2 = -5$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

in I: $x_1 - 2 + 4 = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$

Aufgabe 3: (Nachholklausur)

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & t \\ +2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Für welche reelle Parameter t ist das obige Gleichungssystem lösbar?

b) Berechnen Sie alle reellen Lösungen des obigen Gleichungssystems für $t = -1$

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -0 & t \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2I-III]{I-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2-t \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II-III} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2-t \\ 0 & 0 & 0 & -t-1 \end{pmatrix}$$

lösbar für $-t-1=0 \iff t=-1$

dann gibt es wegen $rg(A) = 2 < 3$ ∞ viele Lösungen

b) Sei $t=-1$, dann gilt

$$2x_2 + x_3 = 3 \qquad \text{setze } x_2 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad x_3 = 3 - 2x_2 = 3 - 2\lambda$$

eingesetzt in I:

$$x_1 + 3\lambda + 3 - 2\lambda = 2 \iff x_1 = -\lambda - 1$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda - 1 \\ \lambda \\ 3 - 2\lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

8P.

Aufgabe 2:
Gegeben ist das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & t \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array}$$

(4) a) Unter welcher Bedingung an den reellen Parameter t ist das obige Gleichungssystem lösbar?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[I-III]{I+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & 2 & 3 & t+2 \\ 0 & -2 & -3 & t-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II+III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & 2 & 3 & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & 2t-2 \end{array}\right)$$

Gl.system lösbar $\Leftrightarrow 2t-2=0 \Leftrightarrow t=1$

In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen
(da $\text{rang}(A) < 3$)

(4) b) Jetzt sei $t = 1$.
Ermitteln Sie für diesen konkreten Fall alle reellen Lösungen des obigen Gleichungssystems unter Verwendung von a).

Das Gl. system lautet nun:

I. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

II. $2x_2 + 3x_3 = 3$

Setze $x_2 = 3\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\xrightarrow{II} 3x_3 = 3 - 6\lambda$

$x_3 = 1 - 2\lambda$

I $\Rightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3$

$= 1 - 3\lambda - 1 + 2\lambda = -\lambda$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ 3\lambda \\ 1-2\lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

8 P.

Aufgabe 2:
Gegeben ist das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & b \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & c \end{array}$$

(3) a) Unter welcher Bedingung an die reellen Parameter a, b und c ist das obige Gleichungssystem lösbar?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 2 & -3 & 1 & b \\ -1 & 2 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}+\mathrm{III}]{2\mathrm{I}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 3 & 2a-b \\ 0 & 1 & 3 & a+c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 3 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c \end{array}\right)$$

Gl.system lösbar $\Leftrightarrow a-b-c=0 \Leftrightarrow a=b+c$

(3) b) Jetzt sei $a = 2, b = 3$ und $c = -1$.
Ermitteln Sie für diesen konkreten Fall alle reellen Lösungen des obigen Gleichungssystems unter Verwendung von a).

Man hat

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

setze $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$

in II : $x_2 + 3\lambda = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - 3\lambda$

in I : $x_1 - (1-3\lambda) + 2\lambda = 2 \Rightarrow x_1 = 3 - 5\lambda$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3-5\lambda \\ 1-3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 4: (Nachschreibklausur)
Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie zunächst alle Eigenwerte λ durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda E_2) = 0$ und sodann für jeden Eigenwert alle Eigenvektoren von A.

$$0 = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)$$

$\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 5$ sind die Eigenwerte

i) zum EW $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 3x_2 = 0$$

setze $x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = -3\alpha$

$$\operatorname{Eig}(A;2) = \left\{ \begin{pmatrix} -3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

ii) zum EW $\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} -3x_1 = 0 = x_1 \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\operatorname{Eig}(A;5) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösungen zur Aufgabe 4: (Fortsetzung)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(1-\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda_1 = 1} \; ; \; \boxed{\lambda_2 = -1} \text{ EW von } B$$

EV von B zu $\lambda = 1$:

$$(B - E_2)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2x_1 = 0 \iff \boxed{x_1 = 0}$$

x_2 frei wählbar. $\boxed{x_2 = \alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Eig}(B; 1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

EV von B zu $\lambda = -1$:

$$(B + E_2)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2x_2 = 0 \iff \boxed{x_2 = 0}$$

x_1 frei wählbar $\boxed{x_1 = \alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Eig}(B; -1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(C - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & -5-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(-5-\lambda)(1-\lambda)$$

$\boxed{\lambda_1 = 3}$; $\boxed{\lambda_2 = -5}$; $\boxed{\lambda_3 = 1}$ EW von C

EV von C zu $\lambda = 3$:

$$(C - 3E_3)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III: $-2x_3 = 0 \iff \boxed{x_3 = 0}$; I: $x_2 + 2x_3 = 0$, wähle $\boxed{x_1 = \alpha}$

$\implies \boxed{x_2 = 0}$

$\implies \boxed{Eig(C;3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$ z.B. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

EV von C zu $\lambda = -5$:

$$(C + 5E_3)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III: $6x_3 = 0 \iff \boxed{x_3 = 0}$; I: $4x_1 + x_2 = 0$; wähle $\boxed{x_1 = \alpha}$

$\implies \boxed{x_2 = -4\alpha}$

$\implies \boxed{Eig(C;-5) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -4\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$ z.B. $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

EV von C zu $\lambda = 1$:

$$(C - E_3)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

II: $-6x_2 + 7x_3 = 0$; wähle $\boxed{x_3 = 6\alpha}$ $\overset{II}{\implies} 6x_2 = 7 \cdot 6\alpha \;|:6$

$\implies \boxed{x_2 = 7\alpha}$

I: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \implies \boxed{x_1 = -19\alpha}$

$\implies \boxed{Eig(C;1) = \left\{ \begin{pmatrix} -19\alpha \\ 7\alpha \\ 6\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$ z.B. $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -19 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$