6 P.

Aufgabe 5:
Ermitteln Sie für die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3y$$

Art und Lage aller lokalen Extrema und Sattelpunkte.

$f_x = 2x - y \quad ; \quad f_y = 2y - x + 3$

$f_{xx} = 2 = f_{yy} \; ; \; f_{xy} = -1 = f_{yx}$

I. $2x - y = 0 \quad \Rightarrow y = 2x$

II $2y - x + 3 = 0$

I eingesetzt in II $\Rightarrow 2(2x) - x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 4x - x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$\Rightarrow y = 2 \cdot (-1) = -2$

$\Rightarrow$ stationärer Punkt $P(-1|-2)$

$H_f(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(P) = 4 - 1 = 3 > 0$

wegen $f_{xx} = 2 > 0$ hat f bei P ein lokales Minimum

nämlich

$f(P) = (-1)^2 + (-2)^2 - (-1)(-2) + 3(-2)$

$= 1 + 4 - 2 - 6 = -3 \Rightarrow \boxed{H(-1|-2|-3)}$

15 P. **Aufgabe 5:**
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$$

5a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung und ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene $t(x,y)$ im Punkt $P(2;0)$ an die Fläche von $f(x,y)$.
Welche Steigung hat $f(x,y)$ im Punkt P in der Richtung die von P nach $Q(5;4)$ führt?

$$f_x = 3(x+y)^2 - 12y \qquad f_y = 3(x+y)^2 - 12x$$

$$f_{xx} = 6(x+y) = f_{yy}$$

$$f_{xy} = 6(x+y) - 12 = f_{yx}$$

$$(*) \quad t(x,y) - t(2;0) = f_x(2;0)(x-2) + f_y(2;0)(y-0)$$

$$f_x(2;0) = 12 \; ; \; f_y(2;0) = 12 - 24 = -12$$

$$t(2;0) = f(2;0) = 8$$

$$\Rightarrow t(x,y) = 12(x-2) - 12y + 8$$

$$= 12x - 12y - 16$$

$$\boxed{f_v(P) = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \nabla f(P)\vec{v}} \qquad \text{wobei } v = \vec{PQ} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5 \qquad = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

(7)

$$\Rightarrow f_v(P) = \frac{1}{5}(12 \; ; -12)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}(12 \cdot 3 - 12 \cdot 4)$$

$$= -\frac{12}{5} = -2{,}4$$

Alternative zu $(*)$: $t(x,y) = ax + by + c$

$$\Rightarrow a = t_x(2;0) = f_x(2;0) = 12$$

$$b = t_y(2;0) = f_y(2;0) = -12$$

$$\Rightarrow t(x,y) = 12x - 12y + c \Rightarrow 8 = t(2;0) = 24 + c$$

$$\Rightarrow c = 8 - 24 = -16 \Rightarrow t(x,y) = 12x - 12y - 16$$

5b) **Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extrema und Sattelpunkte. Zeigen Sie, dass $f(x, y)$ keine globalen Extrema besitzt.**

$f_x = 0$ und $f_y = 0$

I. $3(x+y)^2 - 12y = 0$

II. $3(x+y)^2 - 12x = 0$

$12x = 12y \Leftrightarrow x = y$

(8) in I: $3(2x)^2 - 12x = 0$

$12x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow P_1(0;0)$

$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 \Rightarrow P_2(1;1)$

sind stat. Punkte.

$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta f(P_1) = -144 < 0$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei P_1, nämlich $f(P_1) = 0$

$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta f(P_2) = 144 > 0$

wegen $f_{xx}(P_2) = 12 > 0 \Rightarrow$ lok. Min bei P_2,

nämlich $f(P_2) = -4$

Es gibt keine globalen Extrema, denn

$\lim_{x \to \infty} f(x;0) = \lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x;0) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Aufgabe 5:
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + 8y^3 + 12xy$$

(6) a) **Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extrema und Sattelpunkte.**

(2)

$f_x = 3x^2 + 12y \quad ; \quad f_y = 24y^2 + 12x$

$f_{xx} = 6x \qquad f_{yy} = 48y$

$f_{xy} = 12 = f_{yx}$

I. $3x^2 + 12y = 0 \iff x^2 + 4y = 0$

II. $24y^2 + 12x = 0 \iff 2y^2 + x = 0 \iff x = -2y^2$

in I eingesetzt: $(-2y^2)^2 + 4y = 0 \iff 4y^4 + 4y = 0$

(2) $\iff y(y^3+1) = 0 \iff y_1 = 0 \lor y_2 = -1$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{also } P_1(0/0) \\ y_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -2 \quad \text{also } P_2(-2/-1) \end{array}\right\} \text{kritische Stellen}$$

$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_f(P_1) = -12 \cdot 12 < 0$

d.h. f hat bei P_1 Sattelpunkt $f(P_1) = 0$

(2) $H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -48 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_f(P_2) = 12 \cdot 48 - 12 \cdot 12 > 0$

wegen $f_{xx}(P_2) = -12 < 0$ hat f bei P_2 lok. Maximum

$f(P_2) = -8 - 8 + 24 = 8$

(4) b) **Berechnen Sie die Ableitung von $f(x,y)$ im Punkt $P(2;1)$ in der Richtung die von P nach $Q(-1;0)$ führt?**

$f_{\vec{v}}(P) = \frac{1}{|\vec{v}|} \nabla f(P) \cdot \vec{v}$, wobei

$\vec{v} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \; |\vec{v}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow f_{\vec{v}}(P) = \frac{1}{\sqrt{10}} (24; 48) \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} (-72 - 48) \approx -37{,}95$

$= -\frac{120}{\sqrt{10}} = -12 \cdot \sqrt{10}$

10 P.

10

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 27x + 1$$

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung und geben Sie das totale Differential dz an.

b) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extrema und Sattelpunkte.

(3) a) $f_x = 3x^2 + 3y^2 - 27$; $f_y = 6xy$

(2)

$f_{xx} = 6x = f_{yy}$; $f_{xy} = 6y = f_{yx}$

totale Diff: $dz = (3x^2+3y^2-27)dx + (6xy)dy$ (1)

(7) b) I. $3x^2 + 3y^2 - 27 = 0$

(1)

II. $6xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$

(2) $\begin{cases} \text{falls } x = 0 \Rightarrow 3y^2 = 27 \Leftrightarrow y^2 = 9 \\ \qquad \Rightarrow y_1 = 3, \; y_2 = -3 \\ \text{falls } y = 0 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \\ \qquad \Rightarrow x_1 = 3; \; x_2 = -3 \end{cases}$

damit kritische Stellen $P_1 = (0;3)$; $P_2 = (0;-3)$; $P_3 = (3;0)$, $P_4 = (-3;0)$

(1) $H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 18 \\ 18 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(P_1) = -18 \cdot 18 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

(1) $H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(P_2) = -(-18)(-18) < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

(1) $H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(P_3) = 18 \cdot 18 > 0 \Rightarrow$ lok. Min.
wegen $f_{xx}(P_3) = 18 > 0$

(1) $H_f(P_4) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(P_4) = (-18)(-18) > 0 \Rightarrow$ lok. Max
wegen $f_{xx}(P_4) = -18 < 0$

$f(P_1) = 1 = f(P_2)$; $f(P_3) = -53$, $f(P_4) = 55$