(11)

Aufgabe 4:
Eine ebene Fläche A wird durch die beiden Kurven

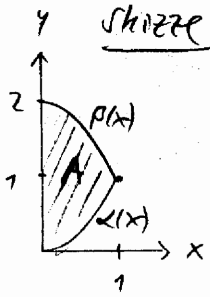
$$\alpha(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad \beta(x) = 2 - x^2$$

mit $0 \le x \le 1$ sowie der y-Achse berandet.

(5) a) Skizzieren Sie die Fläche A in der xy-Ebene und berechnen Sie diese!

Skizze:

(2)



(3)

$$\int_0^1 (\beta(x) - \alpha(x))\,dx$$

$$= \int_0^1 (2 - x^2 - x^2)\,dx = \int_0^1 (2 - 2x^2)\,dx$$

$$= \left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

(6) b) Berechnen Sie das Doppelintegral $\displaystyle\int_0^1 \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} x^2 y \; dydx$

inneres Integral:

(4)

$$\int_{x^2}^{2-x^2} x^2 y\,dy = x^2 \int_{x^2}^{2-x^2} y\,dy = x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2-x^2}$$

$$= x^2 \left(\frac{(2-x^2)^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right) = x^2 \cdot \frac{4 - 4x^2 + x^4 - x^4}{2}$$

$$= x^2(2 - 2x^2) = 2x^2 - 2x^4$$

äußeres Integral:

(2)

$$\int_0^1 (2x^2 - 2x^4)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 2\left(\frac{5}{15} - \frac{3}{15}\right) = \frac{4}{15}$$

Aufgabe 6: (Klausur)

Eine ebene Fläche A wird durch die beiden Kurven

$$\alpha(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad \beta(x) = 2 - x^2$$

mit $0 \le x \le 1$ sowie der y-Achse berandet.

a) Skizzieren Sie die Fläche A in der xy-Ebene.

b) Berechnen Sie die Fläche A mit Hilfe der Formel

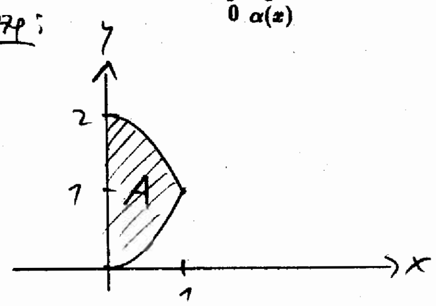
$$A = \int_0^1 \Big(\beta(x) - \alpha(x)\Big)dx$$

c) Berechnen Sie die Koordinaten x_S und y_S des Flächenschwerpunktes von A mit Hilfe der Formeln

$$x_S = \frac{1}{A}\int_0^1 \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} x\, dydx \qquad \text{und} \qquad y_S = \frac{1}{A}\int_0^1 \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} y\, dydx$$

Skizze:

a)



b) $A = \int_0^1 (2 - x^2 - x^2)\,dx$

$= 2\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

c) $x_s = \frac{3}{4}\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x^2} x\, dy\, dx = \frac{3}{4}\int_0^1 x(2 - 2x^2)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x - x^3)\,dx$

$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

$y_s = \frac{3}{4}\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x^2} y\, dy\, dx = \frac{3}{4}\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2-x^2} dx = \frac{3}{8}\int_0^1 \left[y^2\right]_{x^2}^{2-x^2} dx$

$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left((2-x^2)^2 - x^4\right)dx = \frac{3}{8}\int_0^1 (4 - 4x^2 + x^4 - x^4)\,dx$

$= \frac{3}{8}\int_0^1 (4 - 4x^2)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \frac{3}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1 \implies \boxed{S(0{,}375 \mid 1)}$

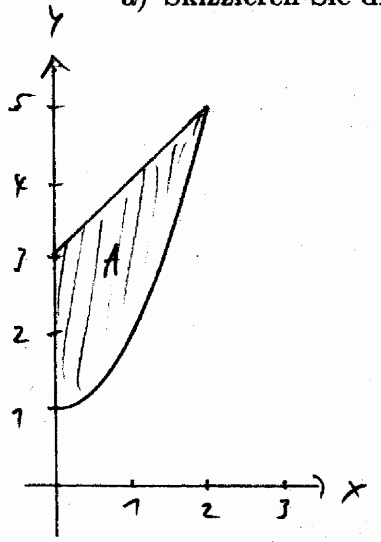
Schwerpunkt

Aufgabe 4:
Eine ebene Fläche A wird durch die beiden Kurven

$$\alpha(x) = x^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad \beta(x) = x + 3$$

mit $0 \le x \le 2$ sowie der y-Achse berandet.

a) Skizzieren Sie die Fläche A in der xy-Ebene und berechnen Sie diese!



$$A = \int_0^2 \left(\beta(x) - \alpha(x)\right) dx = \int_0^2 (x+3-x^2-1)\, dx$$

$$= \int_0^2 (x - x^2 + 2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4 = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \text{ FE}$$

b) Berechnen Sie das Doppelintegral $\displaystyle\int_0^2 \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} xy\, dydx$

inneres Integral:

$$\int_{x^2+1}^{x+3} xy\, dy = x \int_{x^2+1}^{x+3} y\, dy = x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2+1}^{x+3} = \frac{x}{2}\left((x+3)^2 - (x^2+1)^2\right)$$

$$= \frac{x}{2}\left(x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1\right)$$

$$= \frac{x}{2}\left(6x + 8 - x^2 - x^4\right) = 3x^2 + 4x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2}$$

äußeres Integral:

$$\int_0^2 \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} xy\, dy\, dx = \int_0^2 \left(3x^2 + 4x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2}\right) dx$$

$$= \left[x^3 + 2x^2 - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12}\right]_0^2$$

$$= 8 + 8 - 2 - \frac{16}{3} = \frac{42 - 16}{3} = \frac{26}{3} = 8{,}\overline{6}$$

15P.

Aufgabe 6:
Gegeben ist der Einheitskreis E um den Mittelpunkt $(0;0)$ in der xy-Ebene und $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.
Berechnen Sie das Volumen V des zylindrischen Körpers mit Boden E und dem Graphen von $f(x,y)$ als Deckel mit Hilfe von Polarkoordinaten.
Hinweis: Benutzen Sie die Formel

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\; dr d\varphi$$

und verwenden Sie $\int ue^{u^2}\,du = \frac{e^{u^2}}{2} + C$.

(5) $$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = e^{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = e^{r^2\overbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}^{=1}} = e^{r^2}$$

Inneres Integral:

(5) $$\int_0^1 re^{r^2}dr = \frac{1}{2}\left[e^{r^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

äußeres Integral:

(5) $$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e-1)\,d\varphi = \frac{1}{2}\left[(e-1)\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(e-1)\cdot 2\pi = \pi(e-1)$$