(10 P.)

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

b) Berechnen Sie die spezielle Lösung für $y(1) = 1$.

(8) a) substituiere $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx$

(4)

$$\Rightarrow z(1-z) = y' = (zx)' = z'x + z$$

d.h. $z - z^2 = z'x + z$

$$\Leftrightarrow z' = -\frac{z^2}{x}$$

Variablentrennung: $-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$

(4)

$$\frac{1}{z} = \ln|x| + K \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = z = \frac{1}{\ln|x| + K}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{\ln|x| + K} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

(2) b) $1 = y(1) = \frac{1}{\underbrace{\ln 1}_{0} + K} = \frac{1}{K} \Rightarrow K = 1$

$\Rightarrow$ spezielle Lösung $y = \frac{x}{\ln|x| + 1}$

Bem. zu a)

Gesamte Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \frac{x}{\ln|x| + K} \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\} \cup \{0\}$

12 P

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen:

a) $y' = \frac{y}{x^2} + e^{\frac{x^2-1}{x}}$ **(durch Variation der Konstanten)**

b) $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-x}$

5 a) homogener Fall $y' = \frac{y}{x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}$

(2) $\Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{x} + C_1' \Rightarrow y_0 = Ke^{-\frac{1}{x}}$ mit $K \in \mathbb{R}$

Variation der Konstanten: $y = K(x)e^{-\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow \frac{y}{x^2} + e^{\frac{x^2-1}{x}} = y' = K'(x)e^{-\frac{1}{x}} + K(x)e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$

$= K'(x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{y}{x^2} \quad | - \frac{y}{x^2}$

(3) $\Rightarrow K'(x)e^{-\frac{1}{x}} = e^{\frac{x^2-1}{x}}$

$\Rightarrow K'(x) = e^{\frac{x^2-1}{x}} e^{\frac{1}{x}} = e^{x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} = e^x$

$\Rightarrow K(x) = \int e^x dx = e^x + C_1$ mit $C_1 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow y = (e^x + C_1)e^{-\frac{1}{x}}$ mit $C_1 \in \mathbb{R}$.

7 b) (3) homogener Fall: $y'' + 3y' + 2y = 0$ führt zur char. Gleichung $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, daraus folgt

$\lambda_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$

damit Fundamentalsystem $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-2x}$

$\Rightarrow$ allg. homogene Lösung $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(4) inhomogener Fall: Störglied $g(x) = 3e^{-x}$, dabei ist -1 einfache Lösung von $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ und daher

$y_p = Axe^{-x} \Rightarrow y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x} = (A - Ax)e^{-x}$

$y_p'' = -Ae^{-x} - (A - Ax)e^{-x} = (Ax - 2A)e^{-x}$

eingesetzt in Dgl. ergibt

$3e^{-x} = (Ax - 2A)e^{-x} + 3(A - Ax)e^{-x} + 2Axe^{-x} \quad | \cdot e^x$

$\Rightarrow 3 = \cancel{Ax} - 2A + 3A - \cancel{3Ax} + \cancel{2Ax} = A$

$\Rightarrow y_p = 3xe^{-x} \Rightarrow y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3xe^{-x}$ allg. Lösung.

10

Aufgabe 5:
Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = 3 + e^{y-3x-1}$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe einer geeigneten Substitution

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für $y(0) = 1$ und ihren maximalen Definitionsbereich.

(6) a) Substituiere $z = y - 3x - 1$, dann folgt

$$z' = y' - 3 = 3 + e^z - 3 = e^z$$

Variablentrennung: $\frac{dz}{dx} = e^z \iff e^{-z} dz = dx$

$$\Rightarrow \int e^{-z} dz = \int dx \Rightarrow -e^{-z} = x - c_1$$

$$\Rightarrow e^{-z} = c_1 - x \Rightarrow -z = \ln(c_1 - x)$$

$$\Rightarrow y - 3x - 1 = z = -\ln(c_1 - x)$$

$$\Rightarrow y = 3x + 1 - \ln(c_1 - x) \text{ mit } c_1 \in \mathbb{R}$$

(4) b) $1 = y(0) = 1 - \ln(c_1) \Rightarrow \ln(c_1) = 0$

$\Rightarrow c_1 = 1$

(2) $\Rightarrow$ spezielle Lösung $y = 3x + 1 - \ln(1 - x)$

es muss $x < 1$ sein

(1) $\Rightarrow D_{max} =]-\infty, 1[$

(12)

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen:

a) $y' = 5y - 10x + 7$ (durch Aufsuchen einer partikulären Lösung)

b) $y'' - 2y' - 3y = 5e^{-2x}$

(6) a) homogener Fall: $y' = 5y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 5\,dx$

(2) $\Rightarrow \ln|y| = 5x + C_1 \Rightarrow y_0 = Ke^{5x}$ mit $K \in \mathbb{R}$.

Störfunktion $g(x) = -10x + 7$, daher Ansatz

(4) $y_p = ax + b$, eingesetzt in Diff.gleichung

$a = y_p' = 5y_p - 10x + 7 = 5(ax+b) - 10x + 7 \quad | -5(ax+b)$

$a - 5(ax+b) = -10x + 7 \Leftrightarrow -5ax + a - 5b = -10x + 7$

Koeffizientenvgl ergibt

I. $-5a = -10 \Rightarrow a = 2$; II. $a - 5b = 7 \Rightarrow b = \frac{1}{5}(a-7) = -1$

$\Rightarrow y_p = 2x - 1 \Rightarrow y = Ke^{5x} + 2x - 1$

(6) b) homogener Fall: $y'' - 2y' - 3y = 0$ führt zur char. Gleichung

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, daraus folgt $\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$

(3) $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$

damit hat man Fundamentalsystem $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-x}$

$\Rightarrow$ allg. homogene Lösung $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

inhomogener Fall: Störglied $g(x) = 5e^{-2x}$, dabei ist -2 keine Lösung von $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ und daher Ansatz

(3) $y_p = Ae^{-2x} \Rightarrow y_p' = -2Ae^{-2x}$, $y_p'' = 4Ae^{-2x}$

eingesetzt in Diff.gleichung ergibt

$5e^{-2x} = 4Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} - 3Ae^{-2x} = 5Ae^{-2x} \quad | : e^{-2x}$

$\Rightarrow 5A = 5 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_p = e^{-2x}$

$\Rightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + e^{-2x}$ allg. Lösung.

(12)

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie die allgemeine und spezielle Lösung folgender Differentialgleichungen:

a) $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 x \sin x + \frac{y}{x}$ mit $y(\pi) = 1$ (Substitution)

b) $xy' = y + x$ mit $y\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e}$ (Variation der Konstanten)

a) Substituiere $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx$ und

(2) $z^2 x \sin x + z = y' = (zx)' = z'x + z \quad | - z$

$\Rightarrow z'x = z^2 x \sin x \Rightarrow z' = z^2 \sin x$

Variablentrennung: $\int \frac{dz}{z^2} = \int \sin x \, dx - c_1$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -\frac{1}{z} = -\cos x - c_1 \Rightarrow z = \frac{1}{\cos x + c_1}$

(4) $\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{\cos x + c_1} \Rightarrow y = \frac{x}{\cos x + c_1}$ allg. Lösung

$1 = y(\pi) = \frac{\pi}{\cos\pi + c_1} = \frac{\pi}{c_1 - 1} \Rightarrow c_1 = \pi + 1$

$\Rightarrow y = \frac{x}{\cos x + \pi + 1}$ spezielle Lösung.

---

b) $y' = \frac{y}{x} + 1$, homogener Fall: $y' = \frac{y}{x}$

(2) Variablentrennung: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c_1 \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + c_1$

$\Rightarrow y = \pm e^{c_1} e^{\ln|x|} = Kx$ mit $K \in \mathbb{R}$.

Variation der Konstanten: $y = K(x)x$, daraus

$\frac{y}{x} + 1 = y' = K'(x)x + K(x) = K'(x)x + \frac{y}{x} \quad | - \frac{y}{x}$

(4) $\Rightarrow K'(x)x = 1 \Rightarrow K'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow K(x) = \int \frac{dx}{x} + c_1 = \ln|x| + c_1$

$\Rightarrow y = (\ln|x| + c_1)x$ allg. Lösung.

$\frac{1}{e} = y\left(\frac{1}{e^2}\right) = \left(\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + c_1\right)\frac{1}{e^2} = (c_1 - 2)\frac{1}{e^2} \quad | \cdot e^2$

$\Rightarrow c_1 - 2 = e \Rightarrow c_1 = e + 2 \Rightarrow y = (\ln|x| + e + 2)x$ spez. Lösung.

(12)

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

a) $y'' - 4y' + 3y = x$

b) $y'' - y = \cos x$

a) homogener Fall: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$

(2) $\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

$\Rightarrow y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ allg. homog. Lösung.

inhomogener Fall: $g(x) = x \Rightarrow y_p = ax + b$

$\Rightarrow y_p' = a, \; y_p'' = 0$, eingesetzt in Diffgl. ergibt

(4) $x = y_p'' - 4y_p' + 3y_p = -4a + 3(ax+b) = 3ax + 3b - 4a$

Koeffizientenvgl. ergibt: I. $3a = 1 \Rightarrow a = 1/3$

II. $3b - 4a = 0 \Rightarrow b = \frac{4}{3}a = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow y_p = \frac{x}{3} + \frac{4}{9} \Rightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + \frac{x}{3} + \frac{4}{9}$ allg. Lösung.

---

b) homogener Fall: $y'' - y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$

(2) $\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Rightarrow y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ allg. homogene Lösung.

inhomogener Fall: $g(x) = \cos x$ und i keine Lösung von $\lambda^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow y_p = A\sin x + B\cos x \Rightarrow y_p' = A\cos x - B\sin x$

$\Rightarrow y_p'' = -A\sin x - B\cos x$, eingesetzt in Diffgl. ergibt:

(4) $\cos x = y_p'' - y_p = -A\sin x - B\cos x - A\sin x - B\cos x$

$= -2A\sin x - 2B\cos x$

Koeffizientenvgl. ergibt: I. $-2A = 0 \Rightarrow A = 0$, II. $-2B = 1$

$\Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_p = -\frac{\cos x}{2}$

$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{\cos x}{2}$ allg. Lösung.

14 P.

Aufgabe 5:

a) Lösen Sie die Differentialgleichung $z' + \frac{z}{x} = 1$ durch Variation der Konstanten.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung von $y' - \frac{y}{x} + y^2 = 0$ an.

Hinweis: Substituiere $y = \frac{1}{z}$ und verwandle in eine Differentialgleichung der Form $z' + \frac{z}{x} = 1$. Benutze sodann das Ergebnis von a)!

c) Geben Sie die spezielle Lösung von $y' - \frac{y}{x} + y^2 = 0$ mit $y(1) = 1$ an.

a) $z' = -\frac{z}{x} + 1$, homogener Fall: $z' = -\frac{z}{x}$

Variablentrennung: $\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x} \iff \ln|z| = -\ln|x| + C_1$

$\Rightarrow z = \pm e^{C_1} e^{-\ln|x|} = \frac{K}{x}$ mit $K \in \mathbb{R}$.

(6) Variation der Konstanten: $z = \frac{K(x)}{x}$, daraus

$-\frac{z}{x} + 1 = z' = \frac{K'(x)x - K(x)}{x^2} = \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} = \frac{K'(x)}{x} - \frac{z}{x}$

$\Rightarrow \frac{K'(x)}{x} = 1 \iff K'(x) = x \Rightarrow K(x) = \int x\,dx + C_1$

$\Rightarrow z = \frac{\frac{x^2}{2} + C_1}{x} = \frac{x^2 + 2C_1}{2x} = \frac{x^2 + K}{2x}$ $\left[= \frac{x^2}{2} + C_1 \right.$

allg. Lösung. mit $K \in \mathbb{R}$

b) $0 = \left(\frac{1}{z}\right)' - \frac{1}{zx} + \frac{1}{z^2} = -\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{zx} + \frac{1}{z^2} \quad | \cdot (-z^2)$

(5) $\Rightarrow z' + \frac{z}{x} - 1 = 0 \iff z' + \frac{z}{x} = 1$

nach a) gilt $\frac{1}{y} = z = \frac{x^2 + K}{2x} \iff y = \frac{2x}{x^2 + K}$ mit $K \in \mathbb{R}$

c) $1 = y(1) = \frac{2}{1 + K} \iff K + 1 = 2 \iff K = 1$

(3) damit ist $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ spezielle Lösung.

12 P. **Aufgabe 6:**
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

(5) a) $y'' + 5y' + 4y = e^x$

(7) b) $y'' - 4y = \sin x$

a) homogener Fall: $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$

(2) $\Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4 \qquad = \frac{-5 \pm 3}{2}$

$\Rightarrow y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ allg. homog. Lösung

(-) inhomogener Fall: $g(x) = e^x \Rightarrow y_p = Ae^x$, da 1 keine Lösung von $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

$y_p' = Ae^x = y_p''$, eingesetzt in DGL ergibt:

(3) $e^x = Ae^x + 5Ae^x + 4Ae^x = 10Ae^x \Rightarrow A = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow y_p = \frac{e^x}{10} \Rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x} + \frac{e^x}{10}$ allg. Lösung

b) homogener Fall: $y'' - 4y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4$

(2) $\Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 \Rightarrow y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ allg. homogene Lösung.

(-) inhomogener Fall: $g(x) = \sin x$ und i keine Lösung von $\lambda^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow y_p = A \sin x + B \cos x \Rightarrow y_p' = A \cos x - B \sin x$

$\Rightarrow y_p'' = -A \sin x - B \cos x$, eingesetzt in DGL ergibt:

(5) $\sin x = y_p'' - 4y_p = -A \sin x - B \cos x - 4A \sin x - 4B \cos x$

$= -5A \sin x - 5B \cos x$

Koeffizientenvgl ergibt: I. $-5A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$; II. $-5B = 0 \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow y_p = -\frac{\sin x}{5}$ partikuläre Lösung

$\Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{\sin x}{5}$ allg. Lösung.

(6) 4b) **Bestimmen Sie sowohl die allgemeine wie auch die spezielle Lösung der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung**

$$y'' + 5y' + 4y = 10e^x \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 2 \text{ und } y'(0) = 3$$

homog. Fall: $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$

(2) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -4$ $\qquad = \dfrac{-5 \pm 3}{2}$

$y_0 = d_1 e^{-x} + d_2 e^{-4x}$; $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$

inhomog. Fall: $g(x) = e^x$, 1 keine Lösung von $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

$\Rightarrow y_p = Ae^x = y_p' = y_p''$, daraus

(2) $10e^x = y_p'' + 5y_p' + 4y_p = Ae^x + 5Ae^x + 4Ae^x = 10Ae^x \,/ : 10e^x$

$\Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_p = e^x$

$$\boxed{y = y_0 + y_p = d_1 e^{-x} + d_2 e^{-4x} + e^x}$$

$y' = -d_1 e^{-x} - 4d_2 e^{-4x} + e^x$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = y(0) = d_1 + d_2 + 1 \\ 3 = y'(0) = -d_1 - 4d_2 + 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d_1 + d_2 = 1 \\ -d_1 - 4d_2 = 2 \end{array}\right.$$

$-3d_2 = 3$

(2) $d_1 = 1 - d_2 = 1 + 1 = 2$ $\qquad \Rightarrow d_2 = -1$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2e^{-x} - e^{-4x} + e^x}$$

(spezielle Lösung)