26P. **Aufgabe 1:**
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$$

(5) a) Ermitteln Sie für die obige Funktion f den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.
Stellen Sie $f(x)$ in der Form $f(x) = p(x) + \frac{c}{x-1}$ mit einem Polynom $p(x)$ und einer Konstanten c dar.

(1) max. Def.bereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f(x) = 0 \iff x^2 + 3x = 0 \iff x(x+3) = 0$

$\boxed{x_1 = 0}$ (1) ; $\boxed{x_2 = -3}$ (1)

	1	3	0
1	0	1	4
Σ	1	4	4

$\Rightarrow \boxed{f(x) = x + 4 + \frac{4}{x-1}}$ (2)

(4) b) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von $f(x)$ für $|x| \longrightarrow \infty$ und an den Polstellen. Stellen Sie alle Asymptotengleichungen auf.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x + 4 + \frac{4}{x-1} \right) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(1) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} \left(\frac{x^2 + 3x}{x-1} \right) = \frac{4}{0+} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \frac{4}{0-} = -\infty$

(1) Vertikale Asymp: $\boxed{x = 1}$; schiefe Asymp: $\boxed{y = x + 4}$ (1)

(6) **zu Aufgabe 1:** $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$

c) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x)}{(x-1)^2}$$

(3)
$$= \frac{2x^2+x-3-x^2-3x}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}$$

(3)
$$= \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x+6}{(x-1)^3}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}}$$

[Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ und $f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}$]

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}; \quad f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; \quad f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}\right]$

(4) d) Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema von f.

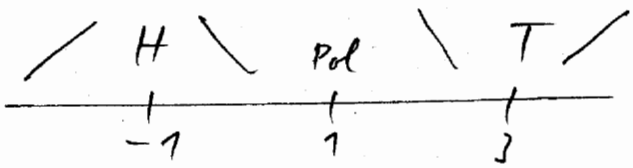
$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\iff (x+1)(x-3) = 0$$
$$\boxed{x_1 = -1}; \quad \boxed{x_2 = 3}$$

$f''(-1) = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \Rightarrow$ lok. Max $\boxed{H(-1|1)}$ (2)

$f''(3) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow$ lok. Min $\boxed{T(3|9)}$ (2)

(3) e) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten von f.

(2) Monotonie



f ist $\begin{cases} \text{mon. steigend für } x < -1 \vee x > 3 \\ \text{mon. fallend für } -1 < x < 3;\ x \neq 1 \end{cases}$

(1) Krümmung

$f''(x) \begin{cases} > 0 \text{ für } x > 1 & \text{(linksgekrümmt)} \\ < 0 \text{ für } x < 1 & \text{(rechtsgekrümmt)} \end{cases}$

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}; \quad f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; \quad f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}\right]$

(4) f) Zwei parallele Tangenten t_1 und t_2 mit der Steigung -3 berühren den Graphen von f in den Punkten B_1 und B_2. Stellen Sie die Gleichungen von t_1 und t_2 auf. [**Hinweis:** Ermitteln Sie zunächst die Koordinaten von B_1 und B_2]

$$f'(x) = -3 \iff \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = -3$$

$$\iff x^2-2x-3 = -3(x^2-2x+1)$$

(1) $$\iff x^2-2x\cancel{-3} = -3x^2+6x\cancel{-3}$$

$$\iff 4x^2-8x = 0 \quad | : 4$$

$$\iff x^2-2x = 0 \iff x(x-2) = 0$$

$x_1 = 0 \implies \boxed{B_1(0|0)}$ (1)

$x_2 = 2 \implies \boxed{B_2(2|10)}$

$t_1(x) = -3x + b_1 \implies 0 = -3 \cdot 0 + b_1 \implies b_1 = 0$

$\implies \boxed{t_1(x) = -3x}$ (1)

$t_2(x) = -3x + b_2 \implies 10 = -6 + b_2 \implies b_2 = 16$

$\implies \boxed{t_2(x) = -3x + 16}$ (1)

Klausur Bau-Mathe 1 WS 09/10 am 26.01.10

24 P. **Aufgabe 1:**
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2}$$

(3) a) Ermitteln Sie für die obige Funktion f den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.

(1) $\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

$f(x) = 0 \iff 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -2$

$\boxed{N_1\left(-\frac{1}{2} \middle| 0\right)}$ (1) $\boxed{N_2(-2|0)}$ (1)

(3) b) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von $f(x)$ für $|x| \longrightarrow \infty$ und an den Polstellen. Geben Sie die Asymptotengleichungen an.

$$f(x) = 2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \lim_{|x| \to \infty} \left(2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 2 + 0 + 0 = 2$$

$\Rightarrow$ horizontale Asymp: $\boxed{y = 2}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2} = \frac{2}{0+} = \infty$$

$\Rightarrow$ vertikale Asymp: $\boxed{x = 0}$

zu Aufgabe 1: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^2}$

(6) c) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$.

(3) $$f'(x) = \frac{(4x+5)x^2 - 2x(2x^2+5x+2)}{x^4}$$

$$= \frac{(4x+5)x - 2(2x^2+5x+2)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{4x^2} + 5x - \cancel{4x^2} - 10x - 4}{x^3}$$

$$= \frac{-5x - 4}{x^3}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}}$$

(3) $$f''(x) = -\frac{5x^3 - 3x^2(5x+4)}{x^6}$$

$$= -\frac{5x - 3(5x+4)}{x^4}$$

$$= -\frac{5x - 15x - 12}{x^4}$$

$$= -\frac{-10x - 12}{x^4}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{10x+12}{x^4}}$$

[Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{5x+4}{-x^3}$ und $f''(x) = \dfrac{10x+12}{x^4}$]

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^2}; \quad f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}; \quad f''(x) = \frac{10x+12}{x^4}\right]$

(6) d) Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema sowie Wendepunkte von f. Stellen Sie die Gleichung der Tangente an f bei $x = -0,5$ auf.

(2) Lokale Extrema

(1) $f'(x) = 0 \iff 5x+4 = 0 \iff x = -\frac{4}{5}$

(1) $f''(-\frac{4}{5}) = \frac{-8+12}{(-4/5)^4} = \frac{4}{(4/5)^4} > 0$

$\Rightarrow$ lokales Minimum $\boxed{T(-\frac{4}{5} \mid -\frac{9}{8})}$

(2) Wendepunkte

(1) $f''(x) = 0 \iff 10x+12 = 0 \iff x = -\frac{6}{5}$

(1) wegen VZW von $f''(x) \Rightarrow$ Wendepunkt $\boxed{W(-\frac{6}{5} \mid -\frac{7}{9})}$

(2) Tangente

$t(x) = f'(-0,5)(x+\frac{1}{2}) + \underbrace{f(-0,5)}_{=0 \text{ wegen a)}}$

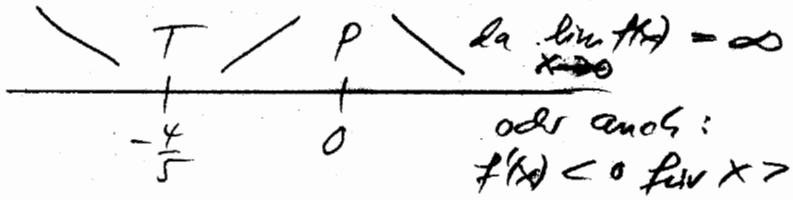
$= 12(x+\frac{1}{2}) = 12x+6$

$\boxed{t(x) = 12x+6}$

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^2}; \quad f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}; \quad f''(x) = \frac{10x+12}{x^4}\right]$

(3) **e) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten von f.**

(2) Monotonie



f ist $\begin{cases} \text{streng steigend für } -\frac{4}{5} < x < 0 \\ \text{streng fallend für } x < -\frac{4}{5} \vee x > 0 \end{cases}$

(1) Krümmung

$f''(x) \begin{cases} > 0 \text{ für } x > -\frac{6}{5} \ (x \neq 0) \ \text{(linksgekrümmt)} \\ < 0 \text{ für } x < -\frac{6}{5} \ \text{(rechtsgekrümmt)} \end{cases}$

(3) **f) Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im dritten Quadranten einschließt, d. h. im Intervall $[-2; -0,5]$.**

$$A = \left| \int_{-2}^{-0,5} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{-2}^{-0,5} \left(2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx \right|$$

$$= \left| \left[2x + 5 \ln|x| - \frac{2}{x} \right]_{-2}^{-0,5} \right| \quad (2)$$

$$= \left| \left(-1 + 5 \ln \overbrace{0,5}^{=2^{-1}} + 4\right) - \left(-4 + 5 \ln 2 + 1\right) \right|$$

$$= \left| 3 - 5 \ln 2 + 4 - 5 \ln 2 - 1 \right|$$

$$= \left| 6 - 10 \ln 2 \right| \approx \boxed{0,9315 \text{ FE}} \quad (1)$$

Klausur Mathe 1 / Bau SS 2008

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 - 18x^2 + 54x - 53}{x^2 - 6x + 9}$$

(5) a) Zeigen Sie mit Hilfe der Polynomdivision, dass die Funktion auch in der Form

$$f(x) = 2x - 6 + \frac{1}{(x-3)^2}$$

darstellbar ist.

$$(2x^3 - 18x^2 + 54x - 53) : (x^2 - 6x + 9) = 2x - 6 + \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$$

$$\begin{array}{l} -(2x^3 - 12x^2 + 18x) \\ \hline \quad -6x^2 + 36x - 53 \\ \quad -(-6x^2 + 36x - 54) \\ \hline \qquad\qquad 1 \end{array}$$

Ferner ist $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

(4) b) Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich, alle Nullstellen und die Gleichungen aller Asymptoten.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; vertikale A: $x = 3$
schiefe A: $y = 2x - 6$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff 2(x-3) = -\frac{1}{(x-3)^2} \quad \Big| \cdot \frac{(x-3)^2}{2}$$

$$\iff (x-3)^3 = -\frac{1}{2} \quad \Big| \sqrt[3]{}$$

$$\iff x = 3 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 2{,}2063$$

(2) c) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, d.h. an der Polstelle und für $x \longrightarrow \infty$ sowie $x \longrightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6 - 6 + \frac{1}{0+} = \infty \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\} (1)$$

noch Aufgabe 1: $f(x) = 2x - 6 + \dfrac{1}{(x-3)^2}$

(7) d) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$ und ermitteln Sie Art und Lage aller lokalen Extrema sowie Wendepunkte.

(4)
$$\begin{cases} f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x-3)^3} = 2\left(1 - \dfrac{1}{(x-3)^3}\right) \\ f''(x) = \dfrac{6}{(x-3)^4} > 0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} f'(x) = 0 \iff 1 = \dfrac{1}{(x-3)^3} \iff (x-3)^3 = 1 \\ \iff x = 4 \\ \Rightarrow \text{lokales Minimum } T(4|3) \end{cases}$$

(1) Wegen $f'' \neq 0$ keine Wendepunkte

(4) e) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten.

(3)
$$\begin{cases} \begin{array}{ccccc} + & \text{Pol} & - & T & + \\ \hline & 3 & & 4 & \end{array} \\ \text{Für } x < 3 \Rightarrow f'(x) = 2 - \underbrace{\dfrac{2}{(x-3)^3}}_{<0} > 0 \end{cases}$$

Somit

f ist $\begin{cases} \text{monoton wachsend für } x < 3 \text{ oder } x > 4 \\ \text{" fallend für } 3 < x < 4 \end{cases}$

(1) Wegen $f'' > 0$ ist f überall linksgekrümmt

(2) f) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\int (2x-6)\,dx + \int \frac{dx}{(x-3)^2}\right]_0^1$$

$$= \left[x^2 - 6x - \frac{1}{x-3}\right]_0^1$$

$$= 1 - 6 - \frac{1}{-2} - \left(-\frac{1}{-3}\right)$$

$$= -5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -5 + \frac{3-2}{6} = -5 + \frac{1}{6}$$

$$= -4\frac{5}{6} = -4{,}8\overline{3}$$

24 P.

17P. **Aufgabe 3:**
Berechnen Sie die folgenden Integrale!

(6) a) $\int \frac{5x+8}{6x^2-5x-4}\,dx$ (Partialbruchzerlegung)

$$6x^2-5x-4=0 \Rightarrow x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{12}$$

$$x_1=\frac{16}{12}=\frac{4}{3} \qquad =\frac{5\pm 11}{12}$$

$$x_2=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 6x^2-5x-4=6\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(3x-4)(2x+1)$$

$$\frac{5x+8}{(3x-4)(2x+1)}=\frac{A}{3x-4}+\frac{B}{2x+1}=\frac{A(2x+1)+B(3x-4)}{(3x-4)(2x+1)}$$

(4)

$$x=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{11}{3}A=\frac{44}{3} \Leftrightarrow \boxed{A=4}$$

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{11}{2}B=\frac{11}{2} \Leftrightarrow \boxed{B=-1}$$

daraus

(2)

$$\int\frac{5x+8}{6x^2-5x-4}\,dx=\int\left(\frac{4}{3x-4}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$$

$$=\frac{4}{3}\ln|3x-4|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C_1$$

zu Aufgabe 3:

(5) b) $\int\limits_{-\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx$ (partielle Integration)

$$\int \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \int (2-4x)e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}(2-4x)e^{-2x} - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(-4)\,dx$$

(3)

$$= (2x-1)e^{-2x} - 2\int e^{-2x}\,dx$$

$$= (2x-1)e^{-2x} + e^{-2x} = 2x\cdot e^{-2x}$$

$$= \frac{2x}{e^{2x}}$$

drans.

$$\int\limits_{-1/4}^{\infty} \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int\limits_{-1/4}^{u} \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \lim_{u\to\infty} \left[\frac{2x}{e^{2x}}\right]_{-1/4}^{u}$$

(2)

$$= \lim_{u\to\infty} \left(\frac{2u}{e^{2u}} + \frac{1}{2e^{-1/2}}\right)$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{u\to\infty} \left(\underbrace{\frac{2}{2e^{2u}}}_{\to 0} + \frac{1}{2}e^{1/2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$\left[\text{Teilergebnis: } \int \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \frac{2x}{e^{2x}} + C\right]$

zu Aufgabe 3: (Partielle Integration)

(5) b) $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{\infty} \frac{1-2\ln x}{x^3}\,dx$ $\left[\text{Teilergebnis: } \displaystyle\int \frac{1-2\ln x}{x^3}\,dx = \frac{\ln x}{x^2} + C\right]$

(2) $$\int \frac{1}{x^3}\cdot(1-2\ln x)\,dx = -\frac{1}{2x^2}(1-2\ln x) - \int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\left(-\frac{2}{x}\right)dx$$

$$= \frac{2\ln x - 1}{2x^2} - \int \frac{dx}{x^3}$$

$$= \frac{2\ln x - 1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{2\ln x}{2x^2}$$

$$= \frac{\ln x}{x^2}$$

(2) jetzt mit Grenzen:

$$\int_{\sqrt{e}}^{\infty} \frac{1-2\ln x}{x^3}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln x}{x^2}\right]_{\sqrt{e}}^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n^2} - \frac{\ln\sqrt{e}}{e}\right)$$

$$\overset{l'H}{=} \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}}_{=0} - \frac{1}{2e} = -\frac{1}{2e}$$

zu Aufgabe 3:

(5) b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x^2-1)\sin x\, dx$ **(Zweifache partielle Integration)**

$$\int (x^2-1)\sin x = -(x^2-1)\cos x - \int (-\cos x)\cdot 2x\, dx$$

$$= (1-x^2)\cos x + 2\int x\cos x\, dx$$

(4) $$= (1-x^2)\cos x + 2\Big(x\sin x - \overbrace{\int \sin x\, dx}^{-\cos x}\Big)$$

$$= (1-x^2)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$$

$$= 2x\sin x + (3-x^2)\cos x$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (x^2-1)\sin x\, dx = \Big[2x\sin x - (x^2-3)\cos x\Big]_{\pi/2}^{\pi}$$

(1) $$= \Big(2\pi \underbrace{\sin\pi}_{=0} - (\pi^2-3)\underbrace{\cos\pi}_{-1}\Big) - \Big(\pi \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{=1} - (\tfrac{\pi^2}{4}-3)\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{=0}\Big)$$

$$= \pi^2 - 3 - \pi \approx 3{,}728$$

$\Big[$**Teilergebnis:** $\int (x^2-1)\sin x\, dx = 2x\sin x - (x^2-3)\cos x + C\Big]$

zu Aufgabe 3:

(5) d) $\int \frac{4x^3+16x^2+21x+8}{(2x+3)^2}\,dx$ (Polynomdivision)

$$(4x^3+16x^2+21x+8):(4x^2+12x+9) = x+1-\frac{1}{(2x+3)^2}$$

$$\underline{-(4x^3+12x^2+9x)}$$

(3)

$$4x^2+12x+8$$

$$\underline{-(4x^2+12x+9)}$$

$$-1$$

$$\int\left(x+1-\frac{1}{(2x+3)^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\frac{(2x+3)^{-2+1}}{-2+1}$$

(2)

$$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2(2x+3)}$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4x+6}$$

(4) e) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (Partielle Integration)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot \ln x\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

(2)

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\cdot 2\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$$

mit Grenzen:

(2)

$$\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\left[\sqrt{x}(\ln x-2)\right]_e^{e^2}$$

$$= 2\left(\sqrt{e^2}(\ln e^2-2)-\sqrt{e}(\ln e-2)\right)$$

$$= 2\left(e\underbrace{(2-2)}_{=0}-\sqrt{e}\underbrace{(1-2)}_{-1}\right) = 2\cdot\sqrt{e}$$

zu Aufgabe 3:

(3) c) $\int \frac{\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}}{x+\frac{1}{x}}\,dx$ $\quad$ $\left[\text{Substitution mit:} \quad t = \ln\left(x^2+1\right)\right]$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{x^2+1} \iff dx \overset{(1)}{=} \frac{x^2+1}{2x}\,dt$$

daraus

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x+\frac{1}{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{t}}{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2+1}{2x}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{t}}{\cancel{x^2+1}}\,\cancel{(x^2+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

(2)

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2} = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\left[\ln(x^2+1)\right]^3} + C$$

zu Aufgabe 3:

(4) c) $\int_{e}^{e^2} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}\,dx$ $\left[\text{Substitution mit: } t = \ln(\sqrt{x})\right]$

(3)

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \boxed{dx = 2x\,dt}$$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx = \int \frac{t}{x} \cdot 2x\,dt = \int 2t\,dt$$

$$= t^2 = (\ln\sqrt{x})^2$$

daraus

$$\int_{e}^{e^2} \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx = \left[(\ln\sqrt{x})^2\right]_{e}^{e^2}$$

$$= (\ln e)^2 - (\ln\sqrt{e})^2 \qquad (1)$$

$$= 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

noch Aufgabe 3:

(4) c) $\displaystyle\int \frac{(1-x)\sin(x-\ln x)}{x}\,dx$ (Hinweis: substituiere $t = x - \ln x$)

$$\underset{\frac{dt}{dx} = 1-\frac{1}{x}}{\overset{t = x - \ln x}{=\!=}} \int \frac{(1-x)\sin t}{x} \cdot \frac{dt}{1-\frac{1}{x}} = \int \left(\frac{1}{x}-1\right)\sin t \cdot \frac{dt}{1-\frac{1}{x}}$$

$$= -\int \sin t\,dt = \cos t = \cos(x - \ln x)$$

6 P. d) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x + 1}{x^2 - 2x + 1}\,dx$ (Hinweis: Polynomdivision)

$$(2x^3 - 7x^2 + 8x + 1) : (x^2 - 2x + 1) = 2x - 3 + \frac{4}{x^2 - 2x + 1}$$

(3)
$$\begin{array}{l} -(2x^3 - 4x^2 + 2x) \\ \hline \quad -3x^2 + 6x + 1 \\ \quad -(-3x^2 + 6x - 3) \\ \hline \qquad\qquad 4 \end{array}$$

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ (1)

daher:

(2) $$\int_{-1}^{0} \left(2x - 3 + \frac{4}{(x-1)^2}\right) dx = \left[x^2 - 3x - \frac{4}{x-1}\right]_{-1}^{0}$$

$$= 4 - (1 + 3 + 2) = 4 - 6 = -2$$

20 P.

zu Aufgabe 3:

(5) c) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{x^3+x}{x^2-1}\,dx$ (Erst Polynomdivision dann Substitution $t = x^2 - 1$)

$$(x^3+x) : (x^2-1) = x + \frac{2x}{x^2-1}$$
$$-(x^3-x)$$
$$2x$$

(1)

$$\int \frac{x^3+x}{x^2-1}\,dx = \int \left(x + \frac{2x}{x^2-1}\right) dx$$

$$\cancel{(1)} \quad = \frac{x^2}{2} + \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx \quad ; \text{ Subst. } t = x^2-1$$

(2)

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2x}$$

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2x}{t} \cdot \frac{dt}{2x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|$$
$$= \ln|x^2-1|$$

somit

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{x^3+x}{x^2-1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x^2-1|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}}$$

$$= \frac{e+1}{2} + \ln|e+1-1| - \frac{2}{2} - \ln|2-1|$$

(2)

$$= \frac{e+1}{2} + \ln e - 1 - \ln 1$$

$$= \frac{e+1}{2} + 1 - 1 - 0 = \frac{e+1}{2} \approx 1{,}86$$

noch Aufgabe 3:

(4) c) $\int \frac{(x^2-1)\cos(x+\frac{1}{x})}{x^2}\,dx$ (Hinweis: substituiere $t = x + \frac{1}{x}$)

$$\frac{dt}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \Leftrightarrow dx = \frac{x^2}{x^2-1}\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{(x^2-1)\cos(x+\frac{1}{x})}{x^2}\,dx = \int \frac{\cancel{(x^2-1)}\cos t}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2-1}}\,dt$$

$$= \int \cos t\,dt = \sin t = \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

(4) d) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (Hinweis: substituiere $x = \sin t$) $\Rightarrow t = \arcsin x$

(2)
$$\frac{dx}{dt} = \cos t \Leftrightarrow dx = \cos t\,dt$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t\,dt$$

$$= \int \frac{t}{\cos t} \cdot \cos t\,dt = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\arcsin x)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{1/2}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left[(\arcsin x)^2\right]_{1/2}^{1}$$

(2)
$$= \frac{1}{2}\left((\arcsin 1)^2 - (\arcsin 1/2)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{36}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{9\pi^2 - \pi^2}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{9}$$

im Gradmaß: $\frac{\pi^2/9}{\pi} = \frac{\alpha}{180} \Leftrightarrow \frac{\pi}{9} = \frac{\alpha}{180} \Leftrightarrow \alpha = 20\pi \approx 62{,}83°$

20 P.

zu Aufgabe 3: $\left[\text{Substitution mit } t = \sqrt{x^2+1}\right]$

(5) c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e^4-1}} \frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1+x^{-2}}}\,dx$ $\left[\text{verwende: } \int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C\right]$

$$t = (x^2+1)^{1/2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad dx = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dt$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dt = \sqrt{1+x^{-2}}\,dt$$

daraus

$$\int \frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1+x^{-2}}}\,dx = \int \frac{\ln t}{\cancel{\sqrt{1+x^{-2}}}}\,\cancel{\sqrt{1+x^{-2}}}\,dt$$

$$= \int \ln t\,dt = t(\ln t - 1) \quad (2)$$

$$= \sqrt{x^2+1}\left(\ln\sqrt{x^2+1} - 1\right)$$

mit Grenzen:

$$\int_0^{\sqrt{e^4-1}} \frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1+x^{-2}}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+1}\left(\ln\sqrt{x^2+1} - 1\right)\right]_0^{\sqrt{e^4-1}}$$

$$(2) \quad = \left(\sqrt{e^4}\left(\ln\sqrt{e^4} - 1\right) - \sqrt{1}\left(\underbrace{\ln\sqrt{1}}_{=0} - 1\right)\right)$$

$$= e^2(\ln e^2 - 1) + 1 = e^2(2-1) + 1$$

$$= e^2 + 1$$

10 P. **Aufgabe 4:**
Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = (2x-3)(x^2-10) \qquad \text{und} \qquad g(x) = 3x(x+2)$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die von $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird. (Beachten Sie, dass A aus mehreren Teilen bestehen kann!)
[Teilergebnis: Schnittstellen von $f(x)$ und $g(x)$ bei $x = -3; 1; 5$]

$$f(x) = g(x) \iff 2x^3 - 20x - 3x^2 + 30 = 3x^2 + 6x$$
$$\iff 2x^3 - 6x^2 - 26x + 30 = 0 \quad | :2$$
$$\iff x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$

(4)

Errate $x_1 = 1$

	1	-3	-13	15
1	0	1	-2	-15
	1	-2	-15	0

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x-1)(x^2 - 2x - 15)$$
$$= (x-1)(x+3)(x-5)$$

$$\Rightarrow x_2 = -3; \; x_3 = 5$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (2x^3 - 6x^2 - 26x + 30)\,dx$$

$$\boxed{H(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 - 13x^2 + 30x}$$

(6)

$$H(1) = \frac{1}{2} - 2 - 13 + 30 = 15\frac{1}{2}$$

$$H(-3) = \frac{81}{2} + 54 - 117 - 90 = -112\frac{1}{2}$$

$$H(5) = \frac{625}{2} - 250 - 325 + 150 = -112\frac{1}{2}$$

$$A_1 = \int_{-3}^{1} (f-g)\,dx = H(1) - H(-3) = 15\frac{1}{2} + 112\frac{1}{2} = 128$$

$$A_2 = \left| \int_{1}^{5} (f-g)\,dx \right| = |H(5) - H(1)| = \left| -112\frac{1}{2} - 15\frac{1}{2} \right| = 128$$

Gesamtfläche $A = A_1 + A_2 = 256$ FE