26P. **Aufgabe 1:**
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$$

(5) a) Ermitteln Sie für die obige Funktion f den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.
Stellen Sie $f(x)$ in der Form $f(x) = p(x) + \frac{c}{x-1}$ mit einem Polynom $p(x)$ und einer Konstanten c dar.

(1) max. Def.bereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0$

$\boxed{x_1 = 0}$; $\boxed{x_2 = -3}$

(1) (1)

	1	3	0
1	0	1	4
Σ	1	4	4

$\Rightarrow \boxed{f(x) = x + 4 + \frac{4}{x-1}}$ (2)

(4) b) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von $f(x)$ für $|x| \longrightarrow \infty$ und an den Polstellen. Stellen Sie alle Asymptotengleichungen auf.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x + 4 + \frac{4}{x-1}\right) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(1) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} \left(\frac{x^2 + 3x}{x-1}\right) = \frac{4}{0+} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \frac{4}{0-} = -\infty$

(1) Vertikale Asymp: $\boxed{x = 1}$; schiefe Asymp: $\boxed{y = x + 4}$ (1)

(6) **zu Aufgabe 1:** $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$

c) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x)}{(x-1)^2}$$

(3) $$= \frac{2x^2+x-3-x^2-3x}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}$$

(3) $$= \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x+6}{(x-1)^3}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}}$$

[Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ und $f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}$]

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}; \quad f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; \quad f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3} \right]$

(4) d) Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema von f.

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\iff (x+1)(x-3) = 0$$

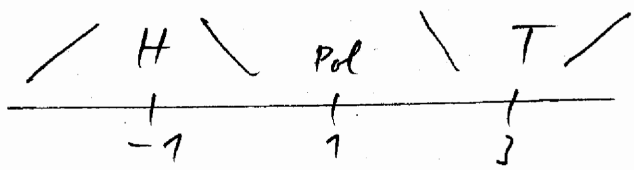
$$\boxed{x_1 = -1} \; ; \; \boxed{x_2 = 3}$$

$$f''(-1) = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \implies \text{lok. Max } \boxed{H(-1|1)} \quad (2)$$

$$f''(3) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \implies \text{lok. Min } \boxed{T(3|9)} \quad (2)$$

(3) e) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten von f.

(2) Monotonie



$$f \text{ ist } \begin{cases} \text{mon. steigend für } x < -1 \lor x > 3 \\ \text{mon. fallend für } -1 < x < 3 \, ; \, x \neq 1 \end{cases}$$

(1) Krümmung

$$f''(x) \begin{cases} > 0 \text{ für } x > 1 \text{ (linksgekrümmt)} \\ < 0 \text{ für } x < 1 \text{ (rechtsgekrümmt)} \end{cases}$$

zu Aufgabe 1: $\left[f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1};\quad f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2};\quad f''(x)=\dfrac{8}{(x-1)^3}\right]$

(4) **f)** Zwei parallele Tangenten t_1 und t_2 mit der Steigung -3 berühren den Graphen von f in den Punkten B_1 und B_2. Stellen Sie die Gleichungen von t_1 und t_2 auf. [**Hinweis:** Ermitteln Sie zunächst die Koordinaten von B_1 und B_2]

$$f'(x)=-3 \iff \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=-3$$

$$\iff x^2-2x-3=-3(x^2-2x+1)$$

(1) $$\iff x^2-2x\cancel{-3}=-3x^2+6x\cancel{-3}$$

$$\iff 4x^2-8x=0 \quad |:4$$

$$\iff x^2-2x=0 \iff x(x-2)=0$$

$$x_1=0 \Rightarrow \boxed{B_1(0|0)}$$ (1)

$$x_2=2 \Rightarrow \boxed{B_2(2|10)}$$

$$t_1(x)=-3x+b_1 \Rightarrow 0=-3\cdot 0+b_1 \Rightarrow b_1=0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1(x)=-3x}$$ (1)

$$t_2(x)=-3x+b_2 \Rightarrow 10=-6+b_2 \Rightarrow b_2=16$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2(x)=-3x+16}$$ (1)

Klausur Bau-Mathe 1 WS 09/10 am 26.01.10

24 P. **Aufgabe 1:**
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2}$$

(3) a) Ermitteln Sie für die obige Funktion f den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.

(1) $\boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

$f(x) = 0 \iff 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -2$

$\boxed{N_1 \left(-\frac{1}{2} / 0\right)}$ $\boxed{N_2 (-2/0)}$

(1) (1)

(3) b) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von $f(x)$ für $|x| \longrightarrow \infty$ und an den Polstellen. Geben Sie die Asymptotengleichungen an.

$f(x) = 2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}$

$\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to \infty} \left(2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 2 + 0 + 0 = 2$

$\Rightarrow$ horizontale Asymp: $\boxed{y = 2}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2} = \frac{2}{0+} = \infty$

$\Rightarrow$ vertikale Asymp: $\boxed{x = 0}$

zu Aufgabe 1: $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2}$

(6) c) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$.

(3) $$f'(x) = \frac{(4x+5)x^2 - 2x(2x^2+5x+2)}{x^4}$$

$$= \frac{(4x+5)x - 2(2x^2+5x+2)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{4x^2} + 5x - \cancel{4x^2} - 10x - 4}{x^3}$$

$$= \frac{-5x - 4}{x^3}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}}$$

(3) $$f''(x) = -\frac{5x^3 - 3x^2(5x+4)}{x^6}$$

$$= -\frac{5x - 3(5x+4)}{x^4}$$

$$= -\frac{5x - 15x - 12}{x^4}$$

$$= -\frac{-10x - 12}{x^4}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{10x+12}{x^4}}$$

[Ergebnis: $f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}$ und $f''(x) = \frac{10x+12}{x^4}$]

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^2}; \quad f'(x) = \frac{5x+4}{-x^3}; \quad f''(x) = \frac{10x+12}{x^4} \right]$

(6) d) Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrema sowie Wendepunkte von f. Stellen Sie die Gleichung der Tangente an f bei $x = -0,5$ auf.

(2) Lokale Extrema

(1) $f'(x) = 0 \iff 5x+4 = 0 \iff x = -\frac{4}{5}$

(1) $\left\{ \begin{array}{l} f''(-\frac{4}{5}) = \frac{-8+12}{(-4/5)^4} = \frac{4}{(4/5)^4} > 0 \\ \Rightarrow \text{lokales Minimum} \quad \boxed{T(-\frac{4}{5} \mid -\frac{9}{8})} \end{array} \right.$

(2) Wendepunkte

(1) $f''(x) = 0 \iff 10x+12 = 0 \iff x = -\frac{6}{5}$

(1) wegen VZW von $f''(x)$ $\Rightarrow$ Wendepunkt $\boxed{W(-\frac{6}{5} \mid -\frac{7}{9})}$

(2) Tangente

$$t(x) = f'(-0,5)(x+\tfrac{1}{2}) + \underbrace{f(-0,5)}_{=0 \text{ wegen a)}}$$

$$= 12(x+\tfrac{1}{2}) = 12x+6$$

$$\boxed{t(x) = 12x+6}$$

zu Aufgabe 1: $\left[f(x) = \dfrac{2x^2+5x+2}{x^2}; \quad f'(x) = \dfrac{5x+4}{-x^3}; \quad f''(x) = \dfrac{10x+12}{x^4} \right]$

(3) **e)** Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten von f.

(2) <u>Monotonie</u>

$\searrow \; T \; \nearrow \; P \; \searrow$ da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$

$-\frac{4}{5} \qquad 0$

oder auch: $f'(x) < 0$ für $x > 0$

f ist $\begin{cases} \text{mon steigend für } -\frac{4}{5} < x < 0 \\ \text{mon fallend für } x < -\frac{4}{5} \vee x > 0 \end{cases}$

(1) <u>Krümmung</u>

$x \neq 0$

$f''(x) \begin{cases} > 0 \text{ für } x > -\frac{6}{5} \text{ (linksgekrümmt)} \\ < 0 \text{ für } x < -\frac{6}{5} \text{ (rechtsgekrümmt)} \end{cases}$

(3) **f)** Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im dritten Quadranten einschließt, d. h. im Intervall $[-2; -0,5]$.

$$A = \left| \int_{-2}^{-0,5} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{-2}^{-0,5} \left(2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx \right|$$

$$= \left| \left[2x + 5\ln|x| - \frac{2}{x} \right]_{-2}^{-0,5} \right| \quad (2)$$

$$= \left| \left(-1 + 5\ln \underbrace{0,5}_{=2^{-1}} + 4\right) - \left(-4 + 5\ln 2 + 1\right) \right|$$

$$= \left| 3 - 5\ln 2 + 4 - 5\ln 2 - 1 \right|$$

$$= \left| 6 - 10\ln 2 \right| \approx \boxed{0,9315 \text{ FE}} \quad (1)$$

Klausur Mathe 1 / Bau SS2008

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 - 18x^2 + 54x - 53}{x^2 - 6x + 9}$$

(5) a) Zeigen Sie mit Hilfe der Polynomdivision, dass die Funktion auch in der Form

$$f(x) = 2x - 6 + \frac{1}{(x-3)^2}$$

darstellbar ist.

$$(2x^3 - 18x^2 + 54x - 53) : (x^2 - 6x + 9) = 2x - 6 + \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$$

$$\frac{-(2x^3 - 12x^2 + 18x)}{-6x^2 + 36x - 53}$$

$$\frac{-(-6x^2 + 36x - 54)}{1}$$

Ferner ist $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

(4) b) Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich, alle Nullstellen und die Gleichungen aller Asymptoten.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; vertikale A: $x = 3$
schiefe A: $y = 2x - 6$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff 2(x-3) = -\frac{1}{(x-3)^2} \quad \Big| \cdot \frac{(x-3)^2}{2}$$

$$\iff (x-3)^3 = -\frac{1}{2} \quad \Big| \sqrt[3]{}$$

$$\iff x = 3 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 2{,}2063$$

(2) c) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, d.h. an der Polstelle und für $x \longrightarrow \infty$ sowie $x \longrightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6 - 6 + \frac{1}{0+} = \infty \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}\right\} (1)$$

noch Aufgabe 1: $f(x) = 2x - 6 + \dfrac{1}{(x-3)^2}$

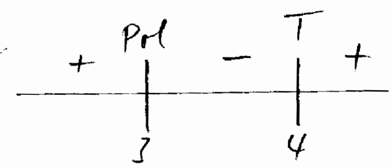
(7) d) Berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$ und ermitteln Sie Art und Lage aller lokalen Extrema sowie Wendepunkte.

(4)
$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-3)^3} = 2\left(1 - \frac{1}{(x-3)^3}\right)$$
$$f''(x) = \frac{6}{(x-3)^4} > 0$$

(2)
$$f'(x) = 0 \iff 1 = \frac{1}{(x-3)^3} \iff (x-3)^3 = 1 \iff x = 4$$
$\Rightarrow$ lokales Minimum $T(4|3)$

(1) Wegen $f'' \neq 0$ keine Wendepunkte

(4) e) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten.

(3)


Für $x < 3 \Rightarrow f'(x) = 2 - \underbrace{\frac{2}{(x-3)^3}}_{<0} > 0$

Somit

f ist $\begin{cases} \text{monoton wachsend für } x<3 \text{ oder } x>4 \\ \text{" fallend für } 3<x<4 \end{cases}$

(1) Wegen $f'' > 0$ ist f überall linksgekrümmt

(2) f) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\int (2x-6)\,dx + \int \frac{dx}{(x-3)^2}\right]_0^1$$
$$= \left[x^2 - 6x - \frac{1}{x-3}\right]_0^1$$
$$= 1 - 6 - \frac{1}{-2} - \left(-\frac{1}{-3}\right)$$
$$= -5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -5 + \frac{3-2}{6} = -5 + \frac{1}{6}$$
$$= -4\frac{5}{6} = -4{,}8\overline{3}$$

24 P.

17P. **Aufgabe 3:**
Berechnen Sie die folgenden Integrale!

(6) a) $\int \frac{5x+8}{6x^2-5x-4}\,dx$ **(Partialbruchzerlegung)**

$$6x^2-5x-4=0 \Rightarrow x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{12}$$

$$x_1=\frac{16}{12}=\frac{4}{3} \qquad =\frac{5\pm 11}{12}$$

$$x_2=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 6x^2-5x-4=6\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(3x-4)(2x+1)$$

$$\frac{5x+8}{(3x-4)(2x+1)}=\frac{A}{3x-4}+\frac{B}{2x+1}=\frac{A(2x+1)+B(3x-4)}{(3x-4)(2x+1)}$$

(4)

$$x=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{11}{3}A=\frac{44}{3} \Leftrightarrow \boxed{A=4}$$

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{11}{2}B=\frac{11}{2} \Leftrightarrow \boxed{B=-1}$$

daraus

(2) $$\int\frac{5x+8}{6x^2-5x-4}\,dx=\int\left(\frac{4}{3x-4}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$$

$$=\frac{4}{3}\ln|3x-4|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c$$

zu Aufgabe 3:

(5) b) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx$ (partielle Integration)

$$\int \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \int (2-4x)e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}(2-4x)e^{-2x} - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(-4)\,dx$$

(3)

$$= (2x-1)e^{-2x} - 2\int e^{-2x}\,dx$$

$$= (2x-1)e^{-2x} + e^{-2x} = 2x \cdot e^{-2x}$$

$$= \frac{2x}{e^{2x}}$$

daraus

$$\int_{-1/4}^{\infty} \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_{-1/4}^{u} \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \lim_{u\to\infty} \left[\frac{2x}{e^{2x}}\right]_{-1/4}^{u}$$

(2)

$$= \lim_{u\to\infty} \left(\frac{2u}{e^{2u}} + \frac{1}{2e^{-1/2}}\right)$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{u\to\infty} \left(\underbrace{\frac{2}{2e^{2u}}}_{\to 0} + \frac{1}{2}e^{1/2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$\left[\text{Teilergebnis:} \quad \int \frac{2-4x}{e^{2x}}\,dx = \frac{2x}{e^{2x}} + C\right]$

zu Aufgabe 3: (Partielle Integration)

(5) b) $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{\infty} \frac{1-2\ln x}{x^3}\,dx$ $\left[\text{Teilergebnis: } \displaystyle\int \frac{1-2\ln x}{x^3}\,dx = \frac{\ln x}{x^2} + C\right]$

(2) $$\int \frac{1}{x^3}\cdot(1-2\ln x)\,dx = -\frac{1}{2x^2}(1-2\ln x) - \int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\left(-\frac{2}{x}\right)dx$$

$$= \frac{2\ln x - 1}{2x^2} - \int \frac{dx}{x^3}$$

$$= \frac{2\ln x - 1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{2\ln x}{2x^2}$$

$$= \frac{\ln x}{x^2}$$

(3) jetzt mit Grenzen:

$$\int_{\sqrt{e}}^{\infty} \frac{1-2\ln x}{x^3}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln x}{x^2}\right]_{\sqrt{e}}^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n^2} - \frac{\ln\sqrt{e}}{e}\right)$$

$$\overset{l'H}{=} \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}}_{=0} - \frac{1}{2e} = -\frac{1}{2e}$$

zu Aufgabe 3:

(5) b) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x^2 - 1) \sin x \, dx$ **(Zweifache partielle Integration)**

$$\int (x^2-1) \sin x = -(x^2-1)\cos x - \int (-\cos x) \cdot 2x \, dx$$

$$= (1-x^2)\cos x + 2 \int x \cos x \, dx$$

(4) $$= (1-x^2)\cos x + 2\Big(x \sin x - \overbrace{\int \sin x \, dx}^{-\cos x}\Big)$$

$$= (1-x^2)\cos x + 2x \sin x + 2\cos x$$

$$= 2x \sin x + (3-x^2)\cos x$$

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} (x^2-1) \sin x \, dx = \Big[2x \sin x - (x^2-3)\cos x\Big]_{\pi/2}^{\pi}$$

(1) $$= \Big(2\pi \underbrace{\sin \pi}_{=0} - (\pi^2-3)\underbrace{\cos \pi}_{-1}\Big) - \Big(\pi \underbrace{\sin \tfrac{\pi}{2}}_{=1} - (\tfrac{\pi^2}{4}-3)\underbrace{\cos \tfrac{\pi}{2}}_{=0}\Big)$$

$$= \pi^2 - 3 - \pi \approx 3{,}728$$

$\Big[$**Teilergebnis:** $\int (x^2-1) \sin x \, dx = 2x \sin x - (x^2-3)\cos x + C\Big]$

zu Aufgabe 3:

(5) d) $\int \frac{4x^3+16x^2+21x+8}{(2x+3)^2}\,dx$ (Polynomdivision)

$$(4x^3+16x^2+21x+8):(4x^2+12x+9) = x+1-\frac{1}{(2x+3)^2}$$
$$\frac{-(4x^3+12x^2+9x)}{\quad}$$
(3) $$4x^2+12x+8$$
$$\frac{-(4x^2+12x+9)}{-1}$$

$$\int\left(x+1-\frac{1}{(2x+3)^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\,\frac{(2x+3)^{-2+1}}{-2+1}$$

(2) $$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2(2x+3)}$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4x+6}$$

(4) e) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (Partielle Integration)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot \ln x\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

(2) $$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\cdot 2\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}(\ln x-2)$$

mit Grenzen:

(2) $$\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\left[\sqrt{x}(\ln x-2)\right]_e^{e^2}$$

$$= 2\left(\sqrt{e^2}(\ln e^2-2)-\sqrt{e}(\ln e-2)\right)$$

$$= 2\left(e\underbrace{(2-2)}_{=0}-\sqrt{e}\underbrace{(1-2)}_{-1}\right) = 2\cdot\sqrt{e}$$

zu Aufgabe 3:

(3) c) $\int \frac{\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}}{x+\frac{1}{x}}\,dx$ $\left[\text{Substitution mit:} \quad t=\ln\left(x^2+1\right)\right]$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow dx \overset{(1)}{=} \frac{x^2+1}{2x}\,dt$$

daraus

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x+\frac{1}{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{t}}{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2+1}{2x}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{t}}{\cancel{x^2+1}}\cancel{(x^2+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

(2)

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot t^{3/2} = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\left[\ln(x^2+1)\right]^3} + C$$

zu Aufgabe 3:

(4) c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}\,dx$ [Substitution mit: $t = \ln(\sqrt{x})$]

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \iff \boxed{dx = 2x\,dt}$$

(3)

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx = \int \frac{t}{x}\cdot 2x\,dt = \int 2t\,dt$$

$$= t^2 = (\ln\sqrt{x})^2$$

daraus

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx = \Big[(\ln\sqrt{x})^2\Big]_e^{e^2}$$

$$= (\ln e)^2 - (\ln\sqrt{e})^2 \qquad (1)$$

$$= 1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$