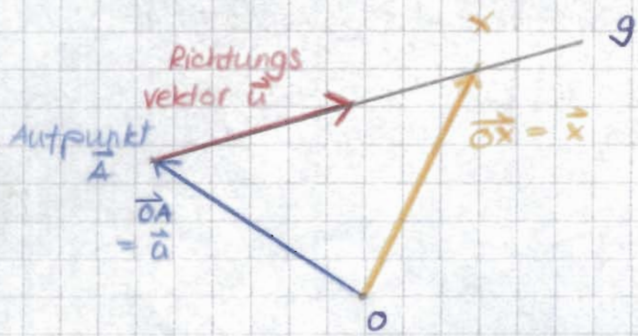
4, Für welches t gilt

$\vec{AB} \perp \vec{AP_t} \Leftrightarrow \vec{AB} \circ \vec{AP_t} = 0$

$$0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t+3 \\ t \\ -9 \end{pmatrix} = 5(t+3) - t + 9$$

$$0 = 5t + 15 - t + 9 = 4t + 24 \Leftrightarrow \underline{t = -6}$$

2.3 Geraden und Ebenen



$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX} =$

$= \vec{OA} + \lambda \vec{u}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Man erhält sog. Punkt-Richtungs-Gleichung:

$$\underline{\underline{g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}}}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ (Parameter)

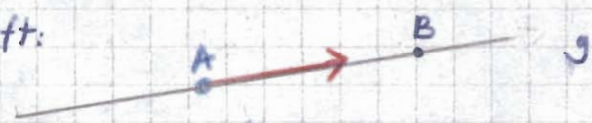
d.h. jeder beliebiger Punkt X auf der Geraden hat die allgemeinen Koordinaten $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix}$

$$X(\overbrace{a_1 + \lambda u_1}^{x_1} | \overbrace{a_2 + \lambda u_2}^{x_2} | \overbrace{a_3 + \lambda u_3}^{x_3})$$

Beispiel

1) Gegeben $A(2|-3|6)$; $B(8|9|-6)$; $\underline{P(2|1|4)}$

a) Stelle Gleichung der Geraden g auf, die durch A u B verläuft:



nehme als Aufpunkt $A(2|-3|6)$, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$

nehme als Richtungsvektor $\underline{\vec{u}} = \frac{1}{6} \vec{AB} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}$

somit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) zeige, dass P nicht auf g liegt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

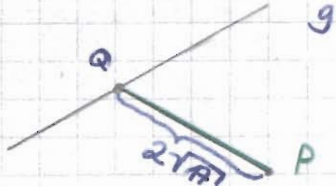
7.4.2011

I, $2 = 2 + \lambda \Leftrightarrow x = 0$

II, $1 = -3 + 2\lambda \Leftrightarrow 1 = -3$ ↯

III, $4 = 6 - 2\lambda$ $\Rightarrow P \notin g$

c)



Bestimme alle Punkte $Q \in g$ die von P den Abstand $2\sqrt{17}$ haben:

Finde Q so, dass

$$|\overrightarrow{PQ}| = 2\sqrt{17}$$

da $Q \in g$ ist, so gilt

mit einem

$$Q\,(2+\lambda \mid -3+2\lambda \mid 6-2\lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ablauf

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ -3+2\lambda \\ 6-2\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -4+2\lambda \\ 2-2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda \\ -4+2\lambda \\ 2-2\lambda \end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{17} \qquad \sqrt{\lambda^2 + (-4+2\lambda)^2 + (2-2\lambda)^2} = 2\sqrt{17}$$

$$\lambda^2 + 16 - 16\lambda + 4\lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = 68$$

$$9\lambda^2 - 24\lambda + 20 = 68$$

$$9\lambda^2 - 24\lambda - 48 = 0 \quad |:3$$

$$3\lambda^2 - 8\lambda - 16 = 0$$

$$\lambda_{1|2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 16}}{6}$$

$$\lambda_1 = 4\ ;\ \lambda_2 = -\frac{4}{3}$$

λ in Q einsetzen: $Q_1(6 \mid 5 \mid -2)$ $\quad Q\left(\frac{2}{3} \mid -\frac{17}{3} \mid \frac{26}{3}\right)$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } P(-3 \mid 5 \mid 2)$$

bestimme den Abstand zwischen P und g, kurz: $d(P,g) = |\overrightarrow{PF}|$

Bestimme F so, dass $\vec{u} \perp \overrightarrow{PF} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \overrightarrow{PF} = 0$

da $F \in g \Rightarrow F(7+3\lambda \mid 3-2\lambda \mid 2+2\lambda)$

$$0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10+3\lambda \\ -2-2\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \qquad 0 = 3(10+3\lambda) + 2(2+2\lambda) + 4\lambda$$

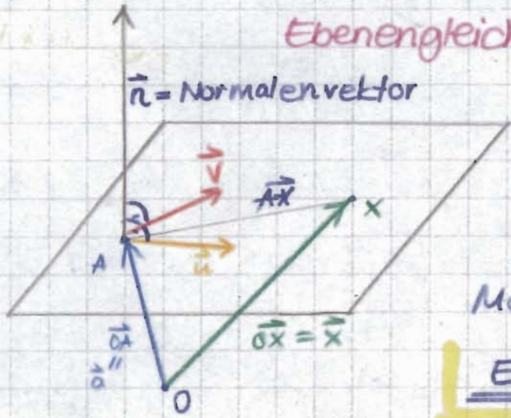
$$0 = 30 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 4\lambda$$

$$0 = 17\lambda + 34 \Leftrightarrow \underline{\lambda = -2}$$

$$\Rightarrow \underline{F\,(1 \mid 7 \mid -2)}$$

$d(P,g) = |\vec{PF}| = \left|\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$

Ebenengleichung



$\vec{0X} = \vec{0A} + \vec{AX} = \vec{0A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Man erhält eine Parametergleichung:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

und $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linearunabhängig

Man hat aber auch

$\vec{n} \circ \vec{AX} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \circ \vec{x} - \vec{n} \circ \vec{a} = 0$

mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ erhält man die sog. Normalengleichung

$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \vec{n} \circ \vec{a} = 0$ $\quad E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - \vec{n} \circ \vec{a} = 0$

z.B. $E: 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 10 = 0$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}$

Punktprüfung

7.4.2011

$E: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 60 = 0$

liegen die Punkte $P(8|-2|4)$, $Q(20|15|12)$ auf der Ebene?

→ Einsetzen von P in E

$3 \cdot 8 + 4 \cdot (2) + 5 \cdot 4 - 60 = 0$ $\qquad -8 = 0 \Rightarrow P \notin E$

→ Einsetzen von Q in E

$3 \cdot 20 - 4 \cdot 15 + 5 \cdot 12 - 60 = 0$ $\qquad 0 = 0 \Rightarrow Q \in E$

<u>Beispiel</u> Gegeben $A(2|9|-4)$; $B(3|7|-9)$; $C(5|8|1)$

$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\2\\a-6\end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$

a) Gleichung für Ebene E aufstellen, die A, B und C enthält

Parameter- und Koordinatenform.

$\vec{a} = \vec{OA} = \begin{pmatrix}2\\9\\-4\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix}3-2\\7-9\\-9+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC} = \begin{pmatrix}5-2\\8-9\\1+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\9\\-4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (Parameterform)

Umwandlung in Normalenform:

$\vec{v} \times \vec{u}$

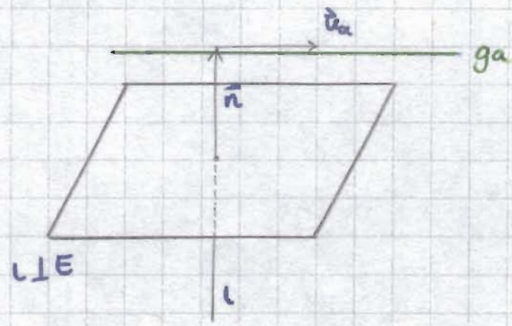
$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\-20\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$

$E: \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \vec{n} \circ \vec{a} = 0$

$E: 3x_1 + 4x_2 - x_3 - \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\9\\-4\end{pmatrix} = 0$

$E: 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 46 = 0$ (Normalenform)
Koordinatenform

b) Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $g_a \parallel E$?



$g_a \parallel E \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}_a$

$\Leftrightarrow \vec{n} \circ \vec{u}_a = 0$

$0 = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\a-6\end{pmatrix}$

$0 = 9 + 8 - a + 6 \Leftrightarrow a = 23$

$g = g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\2\\17\end{pmatrix}$

c) Stelle Gleichung der Lotgeraden l auf, die durch $P(-2|1|4)$ geht.

$L: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$ $\leftarrow \vec{n}$

d) Ermittle den Schnittpunkt von l mit E (Fußpunkt F) $F \in l \cap E$

da $F \in l$, so gilt $F(-2+3\lambda \mid 1+4\lambda \mid 4-\lambda)$ da $F \in E$, so folgt

$0 = 3 \cdot (-2+3\lambda) + 4 \cdot (1+4\lambda) - 4 + \lambda - 46$

$0 = -6 + 9\lambda + 4 + 16\lambda - 4 + \lambda - 46$

$0 = -52 + 26\lambda \qquad \lambda = 2 \Rightarrow F(4|9|2)$

e) Bestimme den Abstand $d(g, E)$ der Geraden g und E

$d(g,E) = d(P,E) = |\vec{PF}| = \left| \begin{pmatrix}6\\8\\-2\end{pmatrix} \right| = \sqrt{36+64+4} = 2\sqrt{26}$