Lösungen Blatt 8:

Afg 1:

i) Gleichung aller Geraden durch den Punkt $P=(0;2)$:

$$g_m(x) = m(x-0)+2 = mx+2$$

ii) Schnittpunkte von $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ mit $g_m(x)$:

$$g_m(x) = f(x)$$

$$mx+2 = -\frac{1}{2}x^2$$

$$2mx+4 = -x^2 \iff x^2+2mx+4=0$$

$$x_m = \frac{-2m \pm \sqrt{4m^2-16}}{2} = -m \pm \sqrt{m^2-4}$$

iii) Ermittlung von m mit $f'(x_m)=m$:

$$f'(x) = -x \Rightarrow f'(x_m) = m \mp \sqrt{m^2-4}$$

$$f'(x_m) = m \iff m^2-4=0 \iff m_1=2 \,;\, m_2=-2$$

Daraus folgt für die Tangenten:

$$\begin{cases} t_1(x) = g_{m_1}(x) = 2x+2 \\ t_2(x) = g_{m_2}(x) = -2x+2 \end{cases}$$

mit den Berührungspunkten $x_m = -m$, d.h. im einzelnen

$$\begin{cases} x_{m_1} = -m_1 = -2 \Rightarrow P_1 = (-2;-2) \\ x_{m_2} = -m_2 = 2 \Rightarrow P_2 = (2;-2) \end{cases}$$

Afg 2:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 6x \quad ; \; f''(x) = 6x+6 \; ; \; f'''(x) = 6$

a) $f'(x) = 0 \iff x(3x+6) = 0$
$\iff x_1 = 0 \, , \, x_2 = -2$

f hat bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ kritische Stellen

$$\begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \implies \text{lokales Min bei } x = 0 \\ f''(-2) = -6 < 0 \implies \quad \text{" Max " } x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{lok. Max von } f = f(-2) = -8+12+1 = 5 \\ \text{" Min " " } = f(0) = 1 \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \iff x = -1 \quad ; \; f'''(-1) \neq 0$

$\implies$ f hat bei $x = -1$ Wendepunkt ; $f(-1) = 3$

b) $$f'(x) = x(3x+6) = \begin{cases} \geq 0 \text{ falls } x \geq 0 \text{ oder } x \leq -2 \\ \leq 0 \text{ falls } -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} f \text{ monoton wachsend auf }]-\infty; -2] \cup [0; \infty[\\ \text{" " fallend " } [-2; 0] \end{cases}$$

$$f''(x) = 6(x+1) = \begin{cases} \geq 0 \text{ falls } x \geq -1 \\ \leq 0 \text{ falls } x \leq -1 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} f \text{ linksgekrümmt auf } [-1; \infty[\\ \text{" rechts -"- " }]-\infty; -1] \end{cases}$$

c) Sei t_1 die Tangente an den Punkt $P_1 = (1/5)$
" t_2 " " " " Wendepunkt $P_2 = (-1;3)$

zunächst $t_1(x) = mx+b$

$$
\begin{array}{lll}
\text{I.} & m+b & = t_1(1) = f(1) = 5 \\
\text{II} & m & = t_1'(1) = f'(1) = 3+6 = 9 \\
\hline
 & 9+b = 5 & \Rightarrow b = -4
\end{array}
$$

$\Rightarrow t_1(x) = 9x-4$

jetzt $t_2(x) = mx+b$

$$
\begin{array}{lll}
\text{I.} & -m+b & = t_2(-1) = f(-1) = 3 \\
\text{II.} & m & = t_2'(-1) = f'(-1) = -3 \\
\hline
 & 3+b = 3 & \Rightarrow b = 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow t_2(x) = -3x$

---

2) $g(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

a) Es muß gelten $\frac{1+x}{1-x} > 0$

falls $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$
so folgt $1+x > 0 \Rightarrow x > -1$
somit $-1 < x < 1$

falls $x > 1 \Rightarrow 1+x < 0 \Rightarrow x < -1$ ↯

somit ist $\mathbb{D} =]-1;1[$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2} \neq 0$$

es gibt keine lokalen Extrema oder Sattelpunkte!

$$g''(x) = -\frac{-2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$g''(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$$

$$g'''(x) = \frac{2(1-x^2)^2 - 2x(1-x^2)\cdot 2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}$$

$$= \frac{2(1-x^2)^2 + 8x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4}$$

$$= \frac{2(1-x^2) + 8x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$$

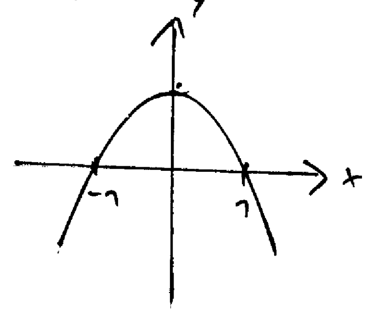
$g'''(0) = 2 \neq 0 \Rightarrow g$ hat bei $(0;0)$ Wendepunkt.

Im Grunde genommen $g'''(x)$ nicht nötig, kann man auch aus dem nachfolgenden Krümmungsverhalten von g ablesen!

b) Monotonieverhalten:

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \begin{cases} > 0 & \text{für } -1 < x < 1 \\ < 0 & \text{für } x > 1 \text{ oder } x < -1 \end{cases}$$

aber hier nicht definiert!



$\Rightarrow g$ monoton wachsend auf $]-1;1[$

Krümmungsverhalten:

$$g''(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} = \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x \geq 0 \\ \leq 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} g \text{ linksgekrümmt} & \text{auf } [0;1[\\ g \text{ rechts} \text{ -"- } & \text{" }]-1;0] \end{array} \right\} \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x=0$

c)

$$\lim_{x\to 1-} g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{0+}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to 1+} g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{0+}{2}\right) = -\infty$$

$\Rightarrow$ Wertebereich $W = \mathbb{R}$

---

3) $h(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^3$;

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^3 + \frac{3}{2}x(x-2)^2$$

$$= (x-2)^2\left(\frac{x-2}{2} + \frac{3x}{2}\right) = (x-2)^2 \cdot \frac{4x-2}{2}$$

$$= (x-2)^2(2x-1)$$

$$h''(x) = 2(x-2)(2x-1) + 2(x-2)^2$$

$$= 2(x-2)(2x-1+x-2) = 2(x-2)(3x-3)$$

$$= 6(x-2)(x-1)$$

$$h'''(x) = 6(x-1+x-2) = 6(2x-3)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2 \; ; \; x_2 = \frac{1}{2}$$

$h''(2) = 0$; $h''(\frac{1}{2}) = 6(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-1) = 6\cdot(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{2} > 0$

somit bei $x = \frac{1}{2}$ lokales Minimum $h(\frac{1}{2}) = -\frac{27}{32}$

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 ; x_2 = 2$

$h'''(1) = -6 \neq 0$, $h'''(2) = 6 \neq 0$

Somit bei $x=1$ und $x=2$ Wendepunkte

$$P_1 = (1; -\tfrac{1}{2}) \text{ und } P_2 = (2; 0),$$

dabei ist wegen $h'(2)=0$ der Punkt P_2 ein Sattelpunkt!

b) Monotonieverhalten:

$$h'(x) = (x-2)^2(2x-1) = \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \\ \leq 0 & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h \text{ monoton wachsend auf } [\tfrac{1}{2}; \infty[\\ h \text{ " fallend " }]-\infty; \tfrac{1}{2}] \end{cases}$$

Krümmungsverhalten:

$$h''(x) = 6(x-1)(x-2) = \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x \leq 1 \text{ oder } x \geq 2 \\ \leq 0 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h \text{ links gekrümmt auf }]-\infty; 1] \cup [2; \infty[\\ h \text{ rechts -"- " } [1; 2] \end{cases}$$

c) Wegen Monotonieeigenschaft hat h bei $x = \frac{1}{2}$ sogar ein globales Minimum.

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \frac{1}{2}\cdot\infty\cdot\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \frac{1}{2}(-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$$

Somit Wertebereich $W = [-\frac{27}{32}; \infty[$.

4) $r(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x+1}$; $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

a) $r'(x) = 2 - \frac{8}{(x+1)^2}$; $r''(x) = \frac{16}{(x+1)^3} \neq 0$

$r'''(x) = -\frac{48}{(x+1)^4} \neq 0$

$r'(x) = 0 \iff \frac{8}{(x+1)^2} = 2 \iff (x+1)^2 = 4 \iff \begin{cases} x_1 = 2-1 = 1 \\ x_2 = -2-1 = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} r''(1) = \frac{16}{8} = 2 > 0 \Rightarrow \text{lok. Min bei } (1;5) \\ r''(-3) = \frac{16}{-8} = -2 < 0 \Rightarrow \text{lok. Max bei } (-3;-11) \end{cases}$

wegen $r''(x) \neq 0$ gibt es keine Wendepunkte!

b) <u>Monotonieverhalten</u>:

$r'(x) \geq 0 \iff 2 \geq \frac{8}{(x+1)^2} \iff (x+1)^2 \geq 4 \iff |x+1| \geq 2$

$\iff x \leq -3 \text{ oder } x \geq 1$

$r'(x) \leq 0 \iff -3 \leq x \leq 1 \text{ und } x \neq -1$

$\Rightarrow \begin{cases} r \text{ monoton wachsend auf }]-\infty;-3] \cup [1;\infty[\\ r \quad \text{"} \quad \text{fallend} \quad \text{"} \quad [-3;1] \setminus \{-1\} \end{cases}$

<u>Krümmungsverhalten</u>:

$r''(x) = \frac{16}{(x+1)^3} = \begin{cases} > 0 & \text{für } x > -1 \\ < 0 & \text{für } x < -1 \end{cases}$

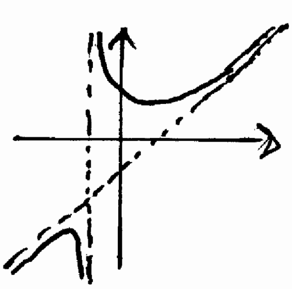
$\Rightarrow \begin{cases} r \text{ links gekrümmt auf }]-1;\infty[\\ r \text{ rechts} \quad \text{—"—} \quad \text{"} \quad]-\infty;-1[\end{cases}$

c) $\lim_{x\to\infty} r(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} r(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-1+} r(x) = -3 + \frac{8}{0+} = -3 + \infty = \infty$

$\lim_{x\to-1-} r(x) = -3 + \frac{8}{0-} = -3 - \infty = -\infty$

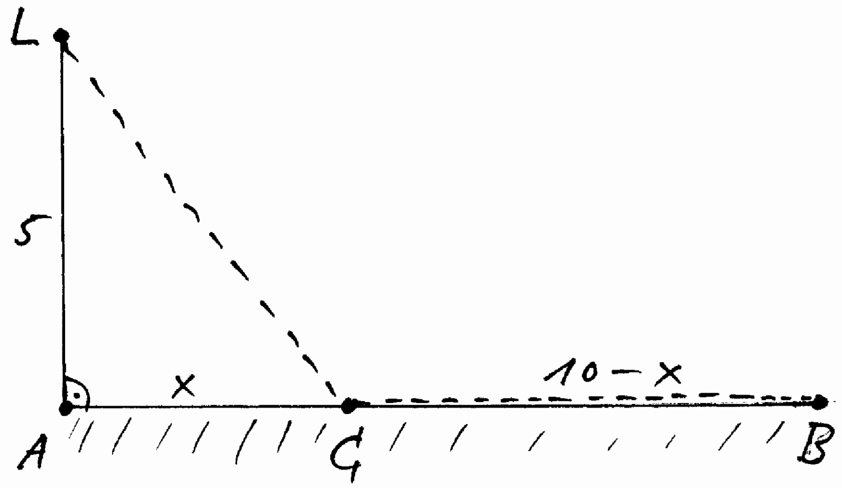
Skizze



Wertebereich: $W = \mathbb{R} \setminus]-11;5[$

$=]-\infty;-11] \cup [5;\infty[$

Afg 3



Für die Gesamtkosten gilt für $0 \le x \le 10$

$$K(x) = 5000\sqrt{x^2+25} + 3000(10-x)$$

$$K'(x) = 2500 \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+25}} - 3000 = \frac{5000x}{\sqrt{x^2+25}} - 3000$$

$$K''(x) = \frac{5000\sqrt{x^2+25} - \frac{1}{2}\cdot 5000x \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+25}}}{x^2+25}$$

$$= \frac{5000(x^2+25-x^2)}{(x^2+25)\sqrt{x^2+25}} = \frac{5000\cdot 25}{(x^2+25)\sqrt{x^2+25}} > 0$$

Nun gilt:

$$K'(x) = 0 \iff 3000\sqrt{x^2+25} = 5000x$$
$$\iff 3\sqrt{x^2+25} = 5x$$
$$\iff 9x^2 + 225 = 25x^2$$
$$\iff 16x^2 = 225 \iff x = 3{,}75 \text{ km}$$

Somit hat man bei $x = 3{,}75$ ein lokales Minimum.

$K(3{,}75) = 50.000$€; $K(0) = 55.000$€; $K(10) \approx 55.902$€

d.h. bei $x = 3{,}75$ km hat man ein globales Minimum, weil die geringsten Kosten entstehen.