Lösungen Blatt 7:

Afg 1: $\quad f(x) = x^r$

Für $r = -1$ ist $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \underset{\text{mit } x(x+h)}{\overset{\text{erweitern}}{=}} \frac{x-(x+h)}{h\cdot x(x+h)}$$

$$= \frac{x-x-h}{h\cdot x(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

daraus folgt:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

Für $r = \frac{1}{2}$ ist $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \underset{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\overset{\text{erweitern mit}}{=}} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Daraus folgt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Afg 2:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{falls } x \leq 2 \\ 7-x & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

Stetigkeit:

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (2x+1) = 5 = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (7-x) = 5 = f(2)$$

also f stetig, insbesondere an der Stelle $x=2$.

Differenzierbarkeit:

$$f_+'(2) = \lim_{x \to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2+} \frac{(7-x)-5}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2+} \frac{2-x}{x-2} = \lim_{x \to 2+} \left(-\frac{x-2}{x-2}\right) = -1$$

andererseits

$$f_-'(2) = \lim_{x \to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2-} \frac{(2x+1)-5}{x-2} = \lim_{x \to 2-} \frac{2x-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2-} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

Man sieht $f_+'(2) \neq f_-'(2)$, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

existiert nicht und deshalb ist f an der Stelle $x=2$ nicht differenzierbar.

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{falls } x \leq 1 \\ a+bx^2 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1 \\ 2bx & \text{für } x > 1 \end{cases}$$ g diffbar auf $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Stetigkeit bei $x = 1$:

$\lim_{x\to 1-} g(x) = 3$ und $\lim_{x\to 1+} g(x) = a+b$

es muß gelten $a+b = 3$

$\lim_{x\to 1-} g'(x) = 1$ und $\lim_{x\to 1+} g'(x) = \lim_{x\to 1+} 2bx = 2b$

es muß gelten $2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

aus $a+b=3 \Rightarrow a = 3-b = 3-\frac{1}{2} = 2{,}5$

damit ist

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2{,}5 + \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

differenzierbar, insbesondere an der Stelle $x = 1$.

Afg 3:

$$N(p) = 14400 - 4(p+10)^2$$

$$\Delta(p) = N(p+1) - N(p) = \left(14400 - 4(p+11)^2\right) - \left(14400 - 4(p+10)^2\right)$$
$$= 4\left((p+10)^2 - (p+11)^2\right)$$

$$\Delta(20) = 4(30^2 - 31^2) = -244$$
$$\Delta(30) = 4(40^2 - 41^2) = -324$$
$$\Delta(40) = 4(50^2 - 51^2) = -404$$

$$N'(p) = -8(p+10)$$

$$N'(20) = -8 \cdot 30 = -240$$
$$N'(30) = -8 \cdot 40 = -320$$
$$N'(40) = -8 \cdot 50 = -400$$

Interpretation: Erhöht sich der Preis um 1 GE (von p auf $p+1$), so sinkt die Nachfrage um $N'(p)$.

z.B. erhöht man den Preis von $p = 20$ auf 21 GE, so sinkt die Nachfrage um 240 ME.

Afg 4:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 17$

$D = \mathbb{R}$

Durch Erraten erhält man erste Nullstelle $x_1 = 2$

	2	-3	-17	30
2	0	4	2	-30
	2	1	-15	0

man erhält $2x^2 + x - 15 = 0$

$$x_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{4} = \frac{-1 \pm 11}{4}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \; ; \; x_3 = -\frac{12}{4} = -3$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x-2)\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+3) = (x-2)(2x-5)(x+3)$$

---

b) $f(x) = \dfrac{2x+30}{x^2+1} \; ; \; D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(2x+30)'(x^2+1) - (2x+30)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+30)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-60x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2-2x^2-60x}{(x^2+1)^2}$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+30 = 0 \Leftrightarrow x = -15$

c) $f(x) = -\frac{1}{3x^3}$; $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Es ist $f(x) = -\frac{1}{3} x^{-3}$, daher

$f'(x) = -(-3) \cdot \frac{1}{3} x^{-4} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

f besitzt keine Nullstellen!

---

d) $f(x) = x - \sqrt{x} + 1$; $\mathbb{D} = [0; \infty[= \mathbb{R}_0^+$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; beachte hierbei: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = 0 \iff x - \sqrt{x} + 1 = 0$

$\iff x + 1 = \sqrt{x}$

$\implies (x+1)^2 = x \iff x^2 + 2x + 1 = x$

$\iff x^2 + x + 1 = 0$

$\iff (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0$

also hat f keine Nullstellen!

---

e) $f(x) = x^2 \sqrt{x} = x^2 x^{\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$; $\mathbb{D} = [0; \infty[$

$f'(x) = \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{x^3}$

alternativ und umständlicher mit Produktregel:

$f'(x) = (x^2)' \sqrt{x} + x^2 (\sqrt{x})'$

$= 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{5}{2} x^{2-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \sqrt{x^3}$

$f(x) = 0 \iff x^2 \sqrt{x} = 0 \iff x = 0$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Es muß gelten $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$

falls $x > 1 \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

also insgesamt $x > 1$

falls $x < 1 \Rightarrow x+1 \leq 0 \Rightarrow x \leq -1$

also insgesamt $x \leq -1$

Somit $\mathbb{D} =]-\infty; -1] \cup]1; \infty[$

Es ist $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ und daher

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$= -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{(x-1)^4}} = -\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

g) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

(*) Es ist $x^2 + 1 > x^2 \implies \sqrt{x^2+1} > |x| \geq -x$

$\implies \sqrt{x^2+1} + x > 0$

d.h. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$\underset{\text{mit } \sqrt{x^2+1}}{\overset{\text{erweitern}}{=}} \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(x + \sqrt{x^2+1}) \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f(x) = 0 \iff x + \sqrt{x^2+1} = 1$$
$$\iff \sqrt{x^2+1} = 1 - x$$
$$\implies x^2+1 = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$$
$$\iff 0 = -2x \iff x = 0$$

Alternative zu (*):

Es muß gelten $x + \sqrt{x^2+1} > 0 \iff \sqrt{x^2+1} > -x$

- Für $x \geq 0$ ist die Ungleichung immer erfüllt!

falls $x < 0 \implies -x > 0 \implies x^2 + 1 > (-x)^2 = x^2$

$\implies 1 > 0$ (w)

Somit ist die Ungleichung <u>für alle</u> x erfüllt, deshalb $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.