Lösungen zum Übungsblatt 1:

Aufgabe 1:

a) Es ist

$$\Big((A \cap B) \cup \overline{C}\Big) \cap \overline{A} = (\emptyset \cup \overline{C}) \cap \overline{A} = \overline{C} \cap \overline{A} = \overline{C \cup A} = B$$

b) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$ und $B = \{3, 6, 9, 12, 15, ...\}$.

Dann ist $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, ...\}$, d.h. alle natürlichen Zahlen, die durch 2 oder 3 teilbar sind.

und $A \cap B = \{6, 12, 18, 24, ...\}$, d.h. alle natürlichen Zahlen, die durch 2 und 3 teilbar und damit durch 6 teilbar sind.

$A \backslash B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, ...\}$, d.h. alle natürlichen Zahlen, die durch 2 aber nicht durch 3 teilbar sind.

$B \backslash A = \{3, 9, 15, 21, ...\}$, d.h. alle natürlichen Zahlen, die durch 3 aber nicht durch 2 teilbar sind.

c) Aus $B \backslash A = \emptyset$ folgt $B \subset A$ und daher $A \cup B = A$ und $A \cap B = B$.

Aufgabe 2:

$$0,5\overline{13} = \frac{1}{10} \cdot 5,\overline{13} = \frac{1}{10}\Big(5 + \frac{13}{99}\Big) = \frac{1}{10} \cdot \frac{508}{99} = \frac{508}{990} = \frac{254}{495}$$

$$0,\overline{513} = \frac{513}{999} = \frac{171}{333} = \frac{57}{111} = \frac{19}{37}$$

Aufgabe 3:

Es ist $1 + 4 + 7 + ... + 100 = \sum_{i=1}^{34} (3i - 2)$ und damit

$$\sum_{i=1}^{34} (3i - 2) = 3\sum_{i=1}^{34} i - \sum_{i=1}^{34} 2 = 3 \cdot \frac{34 \cdot 35}{2} - 2 \cdot 34 = 1717$$

Aufgabe 4:

a)

$$\sum_{i=0}^{6} \frac{4^{i-1}}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{6} \frac{4^{-1}4^i}{2 \cdot 2^i} = \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{6} \left(\frac{4}{2}\right)^i = \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{6} 2^i$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = \frac{1}{8}(2^7 - 1) = 15,875$$

b)

$$\sum_{i=4}^{9} 7^i = \sum_{i=0}^{5} 7^{i+4} = 7^4\sum_{i=0}^{5} 7^i = 7^4 \cdot \frac{7^6 - 1}{7 - 1} = \frac{7^4}{6}(7^6 - 1) = 47.078.808$$

c)

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6} ij = \sum_{i=1}^{5} i\sum_{j=1}^{6} j = \sum_{i=1}^{5} i \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = 21\sum_{i=1}^{5} i = 21 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = 21 \cdot 15 = 315$$

d)

$$\prod_{i=1}^{8} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Aufgabe 5:

a) $\frac{2^x}{3^{-x}} = 2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x = 6^x$

$$\left(\frac{10^{3a+b}}{10^{2a+b}}\right)^7 = \left(10^{3a+b-(2a+b)}\right)^7 = \left(10^{3a+b-2a-b}\right)^7 = (10^a)^7 = 10^{7a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{12a^n b^{2n}}{4b^n}} = \sqrt[n]{3a^n b^n} = \sqrt[n]{3(ab)^n} = ab\sqrt[n]{3}$$

b) $3^x = 2222 \Longleftrightarrow x \cdot \lg 3 = \lg 2222 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\lg 2222}{\lg 3} = 7,0145$

$2^{6x-2} = 4^{2x+3} \Longleftrightarrow 2^{2(3x-1)} = 4^{2x+3} \Longleftrightarrow 4^{3x-1} = 4^{2x+3}$
Daraus folgt schließlich $3x - 1 = 2x + 3 \Longleftrightarrow x = 4$

$\sqrt[x]{1000} = 2^x \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x} \cdot \lg 1000 = x \cdot \lg 2 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x} \cdot 3 = x \cdot \lg 2 \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{3}{\lg 2}$
Daraus folgt schließlich $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{\lg 2}} = \pm 3,157$

$2\ln(x^3) = 4 + \ln(x^2) \Longleftrightarrow 6\ln x = 4 + 2\ln x$
Daraus folgt schließlich $4\ln x = 4 \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e = 2,71828$

Aufgabe 6:

a) Aus $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ erhält man durch Erraten $x_1 = 2$. Durch Herausdividieren des Linearfaktors $(x-2)$ mittels Polynomdivision oder Hornerschema

	1	-3	-10	24
$x_1 = 2$	0	2	-2	-24
$\sum$	1	-1	-12	0

erhält man das Polynom $x^2 - x - 12 = 0$ mit der Lösung

$$x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

also $x_2 = 4$ und $x_3 = -3$.

b) Aus $x^4 - x^3 + x^2 + x = 2 \Longleftrightarrow x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ erhält man durch Erraten $x_1 = 1$. Durch Herausdividieren des Linearfaktors $(x-1)$ mittels Polynomdivision oder Hornerschema

	1	−1	1	1	−2
$x_1 = 1$	0	1	0	1	2
$\sum$	1	0	1	2	0

erhält man das Polynom $x^3 + x + 2 = 0$, deren 1. Lösung man mit $x_2 = -1$ errät. Erneutes Herausdividieren des Linearfaktors $(x + 1)$ mittels Polynomdivision oder Hornerschema

	1	0	1	2
$x_1 = -1$	0	−1	1	−2
$\sum$	1	−1	2	0

ergibt das Polynom $x^2 - x + 2 = 0$. Wegen

$$x_{3/4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$$

gibt es keine weiteren Nullstellen mehr.

Aufgabe 7:

a) $\dfrac{2-x}{3} \geq \dfrac{x+3}{2} \Longleftrightarrow 2(2-x) \geq 3(x+3) \Longleftrightarrow 4 - 2x \geq 3x + 9$

Daraus folgt schließlich $5x \leq -5 \Longleftrightarrow x \leq -1$

b) $\dfrac{3x+7}{x-3} < x$

1. Fall: $x-3>0 \Longleftrightarrow x>3$

$3x+7 < x(x-3) = x^2-3x$. Daraus folgt

$x^2-6x-7>0 \Longleftrightarrow (x+1)(x-7)>0 \Longleftrightarrow x<-1$ oder $x>7$

Somit $\mathbf{L}_1 =]7,\infty[$

2. Fall: $x-3<0 \Longleftrightarrow x<3$

$3x+7 > x(x-3) = x^2-3x$. Daraus folgt

$x^2-6x-7<0 \Longleftrightarrow (x+1)(x-7)<0 \Longleftrightarrow -1<x<7$

Somit $\mathbf{L}_2 =]-1;3[$

Insgesamt hat man $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2 =]-1;3[\ \cup \ ]7,\infty[$

c) $|x^2-16| < 2x-8$

1. Fall: $x^2-16 \geq 0 \Longleftrightarrow (x+4)(x-4) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 4$ oder $x \leq -4$

$x^2-16 < 2x-8 \Longleftrightarrow x^2-2x-8<0 \Longleftrightarrow (x-4)(x+2)<0.$

Das ist genau dann der Fall wenn $x<4$ und $x>-2$ ist, was jedoch wegen $x \leq -4$ oder $x \geq 4$ nicht geht. Somit $\mathbf{L}_1 = \emptyset$.

2. Fall: $x^2-16<0 \Longleftrightarrow (x+4)(x-4)<0 \Longleftrightarrow -4<x<4$

$16-x^2 < 2x-8 \Longleftrightarrow x^2+2x-24>0 \Longleftrightarrow (x-4)(x+6)>0.$

Das ist genau dann der Fall wenn $x>4$ oder $x<-6$ ist, was wegen $-4<x<4$ jedoch nicht geht. Somit $\mathbf{L}_2 = \emptyset$.

Also folgt insgesamt $\mathbf{L} = \emptyset$.

Aufgabe 8:
Zu lösen ist die Ungleichung $|x - 182| \leq 0,3x$

Für $x \geq 182$ folgt

$$x - 182 \leq 0,3x \Longleftrightarrow 0,7x \leq 182 \Longleftrightarrow x \leq 260$$

Somit $\mathbf{L}_1 = [182; 260]$.

Für $x < 182$ folgt

$$182 - x \leq 0,3x \Longleftrightarrow 1,3x \geq 182 \Longleftrightarrow x \geq 140$$

Somit $\mathbf{L}_2 = [140; 182[$.

Insgesamt hat man die Lösungsmenge $\mathbf{L} = [140; 260]$, d. h. der Preis x darf 140 € nicht unterschreiten und 260 € nicht überschreiten.